

## Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti - 30.10.2008

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:

- 1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
- 2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
- 3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
- 4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
- 5) nimikirjoitus.

1. a) Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan että sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  suppenee?

b) Suppeneeko sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{1+n}$ ?

c) Suppeneeko sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n!}$ ?

Perustele vastauksesi.

2. Olkoon

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos(t\pi) \\ y(t) = e^t \sin(t\pi), \end{cases}$$

missä  $t \geq 0$ . Lisäksi määritellään funktio  $u(x, y, t) = x + y + 2t$ .

a) Laske derivaatat  $\frac{dx}{dt}$  ja  $\frac{dy}{dt}$  sekä osittaisderivaatat  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Laske lisäksi ketjusääntöä käyttäen kokonaisderivaatta  $\frac{du(x(t), y(t), t)}{dt}$  pisteessä  $t = 1$ .

b) Oletetaan, että  $(x(t), y(t))$  kuvaa havaitsijan sijaintia tasossa ajanhetkellä  $t$  ja  $u(x, y, t)$  lämpötilaa pisteessä  $(x, y)$  ajanhetkellä  $t$ . Mikä on tässä tilanteessa tulkinta yllä lasketuille derivaatoille  $\frac{du}{dt}$  ja  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

3. Tarkastellaan funktiota  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

a) Mihin suuntaan  $f$  kasvaa nopeimmin pisteessä  $P = (0, 1)$ .

b) Mihin suuntaan  $f$  vähenee nopeimmin pisteessä  $P = (1, 0)$ .

c) Etsi ja luokittele funktion  $f$  kriittiset pisteet.

4. Tarkastellaan pintojen

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y - z + 2 = 0, \quad z = 0,$$

rajoittamaa kappaletta.

- a) Hahmota/kuvaile kappaleen muoto.
- b) Laske kappaleen tilavuus.

5. Tarkastellaan vektorikenttää

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{A} \times (xi + yj + zk)$$

missä  $\mathbf{A}$  on vakiovektori  $\mathbf{A} = (ai + bj + ck)$ .

- a) Onko  $\mathbf{F}$  pyörteetön?
  - b) Onko  $\mathbf{F}$  lähteetön?
  - c) Onko  $\mathbf{F}$  konservatiivinen?
6. Laske vektorikentän  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  vuo ulos epäyhtälöiden

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

määräämstä kuutiosta,

- a) määritelmän mukaan,
- b) Gaussin lauseen avulla.