TKK, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2
Tentti 30.10.2008

Gripenberg

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Teekkari T halusi määrittää funktion $f(x,y)$ paikalliset ääriarvot ja löysi pisteen missä f:n gradientti on nollavektori ja laski funktion toisen derivaatan tässä pisteessä. Seuraavana päivänä hänen paperinsa olivat sekaisin eikä hän muistanut oliko hän saanut tulokseksi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{vai} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}?$$

Mikä matriiseista A ja B on f:n toinen derivaatta ja minkälaisesta ääriarvokohdasta on mahdollistesti kysymys?

2. Mittauksissa on saatu havaintopisteet (x_j, y_j), $j = 1, \dots, n$. Oletetaan, että muuttujien x ja y välinen riippuvuus voidaan esittää muodossa $y = af(x) + bg(x)$ missä f ja g ovat tunnettuja funktioita. Esitä jokin (järkevä) tapa jolla voidaan määrittää luvut a ja b havaintoaineistoon perustuen.

3. Vaihda integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{y}{y+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

ja laske integraalin arvo. Piirrä kuvio!

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(t) = (y(t)-1)^3, \quad y(0) = 2.$$

Millä välillä $[0, T)$ ratkaisu on olemassa?

5. Differentiaaliyhtälön $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ ratkaisemiseksi voidaan käyttää seuraavanlaista menetelmää:

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_n, y_n), \\ K_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1), \\ K_3 &= hf(t_n + h, y_n + 2K_2 - K_1), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}\big(K_1 + 4K_2 + K_3\big), \quad t_{n+1} = t_n + h. \end{aligned}$$

Sovella tätä menetelmää yhtälöön $y'(t) = ay(t)$, $y(0) = 1$ ja laske yksi askel askelpituudella h. Määritä suurin luku m siten että $|y_1 - y(h)| = O(h^m)$ ottaen huomioon että tarkka ratkaisu on $y(h) = \mathrm{e}^{ah} = 1 + ah + \frac{1}{2}(ah)^2 + \frac{1}{6}(ah)^3 + \frac{1}{24}(ah)^4 + O(h^5)$.