

Tentti 30.10.2008.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Tentissä saa käyttää kaikkia yo-hyväksytyjä laskimia.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Totea, että $\lambda = 0$ on matriisin A ominaisarvo ja määritä mahdollisimman monta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, jotka vastaavat tätä ominaisarvoa.

2. a) Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' - 4y = 0$ yleinen ratkaisu.

b) Ratkaise alkuarvot $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

$$y'' + 3y' - 4y = 40 + 80x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

3. a) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 4x/y$ alkuehdolla $y(0) = 2$.

b) Määritä pinnalle $x + y^2 + z^3 = 3$ pisteen $(1, 1, 1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

4. Määritä funktion $f(x, y) = xy^2$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $2x^2 + y^2 = 48$.

5. a) Paraabeli $y = x^2$ ja suora $y = 2x$ rajaavat tasojoukon D . Määritä joukon D pinta-ala A ja keskiön x -koordinaatti

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x \, dA.$$

b) Laske avaruusintegraali

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV,$$

kun B on pallo $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ja funktiolla f on esitys

$$f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) = \rho^2 \sin(\theta/2)$$

pallokoordinaattien avulla. Pallokoordinaatiston tilavuuden suurennussuhde $\rho^2 \sin \varphi$ oletetaan tunnetuksi.