

Mat-1.2600 Applied Probability A

1-st Intermediate Examination, 31 October 2008 / Mellin

Write **clearly on every sheet of paper** the following information:

- Mat-1.2600 ApplProbA 1-st Intermediate Examination, 31 Oct 2008
- Your student identification number
- IN BLOCK LETTERS IN THE FOLLOWING ORDER:
your family name, your first name(s)
- Your degree programme, the year of registration
- Your former names and degree programmes
- Signature

A function calculator plus the collections of formulae and statistical tables of Mellin are allowed.

Justify your solutions – e.g. a correct numerical value without any justification will not give points.

1. (a) A and B toss a fair coin (a coin is considered to be fair, if heads and tails have equal probability to turn up). A will win a round, if a head will turn up, and B will win a round, if a tail will turn up. The first to win 5 rounds gets 100 €. However, the game will be interrupted, when A has won 3 rounds and B has won 2 rounds.

Task 1: Compute the probability that B will get the prize of 100 €, if the game will be continued the next day.

Task 2: Suggest a fair way to divide the prize, if it will not be possible to continue the game.

- (b) You have 12 eggs in your pantry. 4 of the eggs are rotten. You pick up at random 5 eggs for a cake.

Task 1: Compute the probability that none of the rotten eggs will be picked up.

Task 2: Compute the probability that exactly 2 of the rotten eggs will be picked up.

2. The weight of small steel balls is a normally distributed random variable with the parameters $\mu = 10$ g and $\sigma^2 = 0.01$ g². Suppose that you will randomly pick up 10 balls with replacement.

- (a) Compute the probability that there is at most one ball in the sample weighing more than 10.1 g.

- (b) Compute the expected number of balls weighing more than 10.1 g.

3. A bank is kept open five days a week 6 hours each day. The number of customers in one hour is a Poisson-distributed random variable the average number of customers being 60 customers/h.
- Compute the expected number of customers in one week.
 - Compute the probability that there will be less than 1741 customers in one week.
 - Derive the expected length of the time interval between the arrivals of two consecutive customers.
 - Compute the probability that the next customer must be waited more than 2 min.

4. (a) Let the joint distribution of the random variables X and Y be the bivariate (i.e. two-dimensional) normal distribution. Further, let the regression function of Y on X be

$$y = -2 - 2x$$

and let the regression function of X on Y be

$$9x = -9 - 2y$$

Compute the correlation of X and Y .

- (b) Roll a fair dice twice (a dice is considered to be fair, if each of the spot numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6 has equal probability to turn up).

Let

X = the result of the 1-st roll

Y = the result of the 2-nd roll

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

Compute the conditional expectation

$$E(U | V = 2)$$

Mat-1.2600 Tillämpad Sannolikhetskalkyl A

1. mellanförhör 31.10.2008 / Mellin

Skriv **tydligt på varje provpapper** följande uppgifter:

- Mat-1.2600 SovTnA 1. välikoe 31.10.2008
- matrikelnummer + bokstav
- TEXTAT efternamn och alla förnamn
- studieprogram och årskurs
- eventuella tidigare namn och studieprogram
- underskrift

Tillåtna hjälpmedel: **Funktionsräknare och Mellins formel- och tabellsamlingar.**

Svara kort och koncist, men motivera dina lösningar. T. ex. enbart siffervärde som svar ger inte poäng.

1. (a) A och B singlar ett felfritt mynt (myntet är felfritt, om krona och klave kommer upp med samma sannolikhet). A vinner omgången, om krona kommer upp och B vinner omgången, om klave kommer upp. Dem av spelarna, som först vunnit 5 omgångar får potten på 100€. Spelet avbryts emellertid, då A vunnit 3 omgångar och B 2 omgångar.

Fråga 1: Med vilken sannolikhet kommer B att få potten på 100€, om spelet fortsätter nästa dag?

Fråga 2: Förslå ett rättvist sätt att splitta upp vinstpotten, om man inte kan fortsätta spelet.

- (b) I skafferiet finns 12 ägg, av vilka 4 är ruttna. Du väljer slumpmässigt 5 av äggen för en kaka.

Fråga 1: Vad är sannolikheten för att det bland de utvalda äggen inte finns något ruttet ägg?

Fråga 2: Vad är sannolikheten för att det bland de utvalda äggen finns exakt 2 ruttna ägg?

2. Massorna hos små stålkulor är slumpmässigt fördelade enligt normalfördelning med parametrarna $\mu = 10.0$ g och $\sigma^2 = 0.01$ g². 10 kulor plockas ut slumpmässigt med återläggning, dvs. varje kula läggs tillbaka innan en ny kula plockas.

- (a) Vad är sannolikheten för att det bland de plockade 10 kulorna finns högst en kula, som väger mer än 10.1 g?

- (b) Vad är väntevärdet för antalet kulor som väger mer än 10.1 g?

3. En bank är öppen 6 timmar per dag fem dagar i veckan. Antalet kunder, som besöker banken under en timme varierar slumpmässigt enligt en Poisson-fördelning, så att det i genomsnitt går 60 kunder per timme.
- (a) Vad är väntevärdet för antalet kunder i banken under en vecka?
 - (b) Vad är sannolikheten för att det under en vecka går färre än 1741 kunder i banken?
 - (c) Vad är väntevärdet för tiden mellan två på varandra följande kunder?
 - (d) Vad är sannolikheten för att man måste vänta mer än 2 min på nästa kund i banken?

4. (a) Antag, att den gemensamma fördelningen för de stokastiska variabelna X och Y är en tvådimensionell normalfördelning. Antag vidare att variabeln Y har en regressionsfunktion med avseende på variabeln X på formen

$$y = -2 - 2x$$

och att variabeln X har en regressionsfunktion med avseende på variabeln Y på formen

$$9x = -9 - 2y$$

Bestäm korrelationen mellan de stokastiska variabelna X och Y .

- (b) Vi kastar en felfri tärning två gånger (tärningen är felfri om alla dess ögonantal 1,2,3,4,5 och 6 kommer med lika stor sannolikhet).

Låt

X = resultatet från det första kastet

Y = resultatet från det andra kastet

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

Bestäm det betingade väntevärdet

$$E(U | V = 2).$$

Mat-1.2600 Sovellettu todennäköisyyslaskenta A

1. välikoe 31.10.2008 / Mellin

Kirjoita **selvästi jokaiseen koepaperiin** seuraavat tiedot:

- Mat-1.2600 SovTnA 1. välikoe 31.10.2008
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Sallitut apuvälineet: Funktiolaskin ja Mellinin kaava- ja taulukkokokoelmat.

Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustelee ratkaisusi. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä.

1. (a) A ja B heittävät virheetöntä rahaa (raha on virheetön, jos kruunalla ja klaavalla on sama todennäköisyys tulla tulokseksi). A voittaa erän, jos tulee kruuna ja B voittaa erän, jos tulee klaava. Se pelaajista saa 100 €:n palkinnon, joka on ensin voittanut 5 erää. Peli kuitenkin keskeytyy vaiheessa, jossa A on voittanut 3 erää ja B on voittanut 2 erää.

Kysymys 1: Millä todennäköisyydellä B saa 100 €:n palkinnon, jos peliä jatketaan seuraavana päivänä?

Kysymys 2: Ehdota reilua tapaa jakaa voittosumma, jos peliä ei päästä jatkamaan.

- (b) Kaapissa on 12 kanamunaa, joista 4 on pilaantunut. Valitset munista satunnaisesti 5 kappaletta kakkua varten.

Kysymys 1: Mikä on todennäköisyys, että valittujen joukossa ei ole yhtään pilaantunutta munaa?

Kysymys 2: Mikä on todennäköisyys, että valittujen joukossa on täsmälleen 2 pilaantunutta munaa?

2. Pienten teräskuulien painot vaihtelevat satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa parametrein $\mu = 10$ g ja $\sigma^2 = 0.01$ g². Kuulien joukosta poimitaan satunnaisesti 10 kappaletta takaisinpanolla eli palauttaen.

- (a) Mikä on todennäköisyys, että otokseen poimittujen 10 kuulan joukossa on korkeintaan yksi kuula, joka painaa enemmän kuin 10.1 g?

- (b) Mikä on niiden kuulien lukumäärän odotusarvo, jotka painavat enemmän kuin 10.1 g?

3. Pankki on auki viitenä päivänä viikossa 6 tuntia päivässä. Yhden tunnin aikana pankissa käyvien asiakkaiden lukumäärä vaihtelee satunnaisesti noudattaen Poisson-jakaumaa niin, että keskimäärin asiakkaita käy 60 kpl tunnissa.
- (a) Mikä on viikon aikana pankissa käyvien asiakkaiden lukumäärän odotusarvo?
 - (b) Mikä on todennäköisyys, että viikon aikana pankissa käy vähemmän kuin 1741 asiakasta?
 - (c) Mikä on odotusarvo peräkkäisten asiakkaiden tulon väliajalle?
 - (d) Mikä on todennäköisyys, että pankissa joudutaan odottamaan seuraavaa asiakasta kauemmin kuin 2 min?

4. (a) Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on kaksiulotteinen normaalijakauma. Oletetaan lisäksi, että muuttujan Y regressiofunktio muuttujan X suhteen on muotoa

$$y = -2 - 2x$$

ja muuttujan X regressiofunktio muuttujan Y suhteen on muotoa

$$9x = -9 - 2y$$

Määrää satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatio.

- (b) Heitetään virheetöntä noppaa kaksi kertaa (noppa on virheetön, jos sen jokaisella silmäluvulla 1, 2, 3, 4, 5, 6 on sama todennäköisyys tulla tulokseksi).

Olkoon

$$X = \text{tulos 1. heitosta}$$

$$Y = \text{tulos 2. heitosta}$$

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

Määrää ehdollinen odotusarvo

$$E(U | V = 2)$$