S-114.1100 Laskennallinen tiede / Computational Science
Lopputentti / Final Exam 10.12.2009~~8~~

Laskin sallittu, ei muuta materiaalia. / Calculator is allowed, no other material.
Kaikki paperit on palautettava. / All exam papers must be returned.

Tehtävä 1. (6p.) Kuvaa/johda Newtonin menetelmä. Johda, kuinka numeerinen virhe pienenee iteraatioiden lukumäärän funktiona? Kuvaa tyypillisiä virhetilanteita, joissa Newtonin menetelmä ei konvergoidu kohti oikeita ratkaisuja.

Tehtävä 2. (6p.) Mitä ovat splinifunktiot ja mihin niitä käytetään? Miten johdat tarvittavat splinifunktiot (voit käyttää halutessasi jotain esimerkkifunktiota)?

Tehtävä 3. (6p) Kuvaa (kaavoja käyttäen) pienimmän neliösumman menetelmä. Miten se yleistyy kantafunktiojoukon avulla käytettäväksi? Millainen on hyvä kantafunktiojoukko?

Tehtävä 4. (6p.) Miten tuotat satunnaislukuja, jotka noudattavat mielivaltaista todennäköisyysjakaumaa $p(x)$? Voit käyttää esimerkkinä Lorentzin jakaumaa, $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty < x < \infty)$. Mikä olisi vaihtoehtoinen tapa?

Tehtävä 5.
(a) (2p.) Mikä on Metropolis Monte Carlo -menetelmän periaate eli kuinka menetelmä toimii? Kuvaa algoritmi pääpiirteittäin.
(b) (4p.) Selitä ns. importance samplingin periaate ja toiminta Monte Carlo -menetelmässä käyttäen lähtökohtana integraalia

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

missä $f(x)$ on jokin funktio. Muista määritellä muut mahdollisesti tarvitsemasi funktiot hyvin.

FOR THE QUESTIONS IN ENGLISH, PLEASE TURN PAGE.

Problem 1. (6p.) Describe/derive Newton's method. Derive how the numerical error diminishes as a function of number of iterations. Describe typical error situations, where Newton's method will not converge towards the correct solutions.

Problem 2. (6p.) What are spline functions and what are they used for? How do you derive proper spline functions (you may use an example function as a starting point)?

Problem 3. (6p) Describe (using equations) the method of least squares. How can it be extended to usage of basis functions? What is a good set of basis functions like?

Problem 4. (6p) How do you generate an ensemble of random numbers, whose distribution, $p(x)$, is arbitrary? You can use the Lorentzian distribution, $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty < x < \infty)$, as an example.

Problem 5.
(a) (2p.) What is the Metropolis Monte Carlo method based on; i.e. how does the method work? Describe the main steps of the algorithm.
(b) (4p.) Explain the principle of importance sampling in the Monte Carlo method and show how it is applied to computing the value of the integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

where $f(x)$ is some function. Be sure to define all other functions that you might need.

KYSYMYKSET SUOMEKSI KÄÄNTÖPUOLELLA.