Helsinki University of Technology, Department of Information and Computer Science TJ

T-79.3001 Logic in Computer Science: Foundations

Examination, October 29, 2008

Please note the following: your answers will be graded only if you have passed all the three home assignments before the exam!

Assignment 1 (10p)

(a) Define the following concepts: *formation tree*, *truth table*, and *unique names assumption*. ($3 \times 2p$)

(b) What is meant by the notation $\models \phi$?

Prove in detail that if $\models \phi \rightarrow \psi$, then the set of sentences $\Sigma = \{\phi, \neg\psi\}$ is unsatisfiable. (4p)

Assignment 2 (10p) Prove the following claims using semantic tableaux:

(a) $\models (B \rightarrow \neg A) \wedge (B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$

(b) $\{\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \not\models \forall y Q(y)$

Tableau proofs must contain all intermediary steps !!!

Assignment 3 (10p) Derive a Prenex normal form and a clausal form (i.e. a set of clauses S) for the sentence

$$\neg\exists x(\exists y \neg R(x,y) \rightarrow \exists z \neg R(z,x)).$$

Make S as simple as possible. Prove that S is unsatisfiable using resolution.

Assignment 4 (10p) Let us represent strings "", "a", "b", "aa", "ab", "ba", "bb", ... that consist of letters a ja b using ground terms

$$e,\ a(e),\ b(e),\ a(a(e)),\ a(b(e)),\ b(a(e)),\ b(b(e)),\ \ldots,$$

built of a constant symbol e, which represents the empty string "", and unary functions $a(x)$ and $b(x)$, that append the respective letter a or b at the beginning of a string x. Thus $a(b(e))$ is interpreted as $a(b(\text{""})) = a(\text{"}b\text{"}) = \text{"}ab\text{"}$.

(a) Define predicate $O(x)$ = "the number of occurences of a in the string x is odd" using predicate logic so that your definition covers all finite strings represented as explained above.

(b) Give a model $\mathcal{S} \models \Sigma$ of your definition Σ on the basis of which it holds that

$$\Sigma \not\models O(a(b(a(e)))).$$

Assignment 5 (10p)

Explain how the *weakest precondition* B_1 of an if-statement

$$\texttt{if}(B)\ \texttt{then}\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}$$

can be formed given a postcondition B_2 for it.

Consider the following program `Minus`:

```
v=x; z=y; while(!(z==0)) {z=z-1; v=v-1}.
```

Use weakest preconditions and a suitable invariant to establish

$$\models_p [\texttt{true}]\ \texttt{Minus}\ [\texttt{v==x-y}].$$

The name of the course, the course code, the date, your name, your student number, and your signature must appear on every sheet of your answers.

Teknillinen korkeakoulu, tietojenkäsittelytieteen laitos TJ

T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Tentti, 29. lokakuuta, 2008

Huom! Tenttisuorituksen arvosteleminen edellyttää, että kaikki kolme kotitehtävää ovat hyväksytysti suoritetut ennen tenttiä.

Tehtävä 1 (10*p*)

(a) Määrittele seuraavat käsitteet: *jäsennyspuu*, *totuustaulukko* ja *yksikäsitteisten nimien olettamus*. ($3 \times 2p$)

(b) Mitä tarkoitetaan merkinnällä $\models \phi$?

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos $\models \phi \rightarrow \psi$, niin lausejoukko $\Sigma = \{\phi, \neg\psi\}$ on toteutumaton. (4*p*)

Tehtävä 2 (10*p*) Todista semanttisilla tauluilla seuraavat väittämät:

(a) $\models (B \rightarrow \neg A) \wedge (B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$

(b) $\{\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \not\models \forall y Q(y)$

Semanttisten taulujen tulee sisältää kaikki välivaiheet !!!

Tehtävä 3 (10*p*) Johda lauseelle

$$\neg\exists x(\exists y \neg R(x,y) \rightarrow \exists z \neg R(z,x))$$

Prenex-normaalimuoto sekä mahdollisimman yksinkertainen klausuulimuoto (eli klausuulijoukko S) ja osoita S toteutumattomaksi resoluutiolla.

Tehtävä 4 (10*p*) Esitetään kirjaimista a ja b koostuvat merkkijonot "", "a", "b", "aa", "ab", "ba", "bb", ... muuttujattomilla termeillä

$$e,\ a(e),\ b(e),\ a(a(e)),\ a(b(e)),\ b(a(e)),\ b(b(e)),\ \ldots,$$

jotka rakentuvat vakiosymbolista e, joka tarkoittaa tyhjää merkkijonoa "", ja yksipaikkaisista funktioista $a(x)$ ja $b(x)$, joiden ajatellaan liittävän vastaavan kirjaimen a tai b merkkijonon x alkuun. Täten $a(b(e))$ tulkitaan $a(b(\text{""})) = a(\text{"}b\text{"}) = \text{"}ab\text{"}$.

(a) Määrittele predikaatti $O(x) =$ "kirjaimen a esiintymien lukumäärä merkkijonossa x on pariton" predikaattilogiikalla siten, että määritelmäsi kattaa kaikki äärelliset merkkijonot edellä kuvatulla tavalla esitettynä.

(b) Anna laatimallesi määritelmälle Σ malli $\mathcal{S} \models \Sigma$, jonka perusteella

$$\Sigma \not\models O(a(b(a(e)))).$$

Tehtävä 5 (10*p*)

Selitä, kuinka ehtolausekkeelle

$$\texttt{if}(B)\ \texttt{then}\ \{C_1\}\ \texttt{else}\ \{C_2\}$$

voidaan muodostaa *heikoin esiehto* B_1 annetusta jälkiehdosta B_2.

Tarkastellaan seuraavaa ohjelmaa `Minus`:

```
v=x ; z=y ; while(!(z==0)) {z=z-1 ; v=v-1}.
```

Osoita heikoimpia esiehtoja ja sopivaa invarianttia käyttäen, että

$$\models_p [\texttt{true}]\ \texttt{Minus}\ [\texttt{v==x-y}].$$

Vastauspapereissa tulee olla kurssin nimi, koodi ja tenttipäivämäärä, sekä nimi, koulutusohjelma, vuosikurssi, opiskelijanumero ja omakätinen allekirjoitus.