Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti tai välikokeen uusinta 12.1.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Välikoe 1: Tehtävät 1-3.
Välikoe 2: Tehtävät 4-6.
Välikoe 3: Tehtävät 7-9.
Tentti: Tehtävät 1, 3, 4, 6, 7 ja 9.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.
Tehtäväpaperi on kaksipuolinen.

1. (a) Määritä lukujen $z = 2+2i$ ja $w = -3e^{i\pi/4}$ polaariesitykset (siis muoto $re^{i\theta}$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Mille kompleksitason pisteille $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, on voimassa yhtälö
$$\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0?$$

2. (a) Ratkaise x_1 yhtälösysteemistä
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$
   Cramerin säännön avulla.

   (b) Olkoon λ matriisin A ominaisarvo ja olkoon $\mathbf{x} \neq 0$ vastaava ominaisvektori. Osoita, että matriisilla A^p on ominaisarvona λ^p ja vastaava ominaisvektori on $\mathbf{x}$ ($p \in \mathbb{N}$).

3. Laske $A^8 = AAAAAAAA$ diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Määritellään funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(t) = 1 - t$ kun $t \in [0, 1]$ ja $f(t) = 0$ kun $t > 1$. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = f(t)$, $t \geq 0$, alkuehdoilla $x(0) = 1$ ja $x'(0) = 1$.
   Vihje: Ratkaise ensin yhtälö $x_1''(t) + 2x_1'(t) - 3x_1(t) = 1 - t$ tehtävänannon alkuehdoilla. Ratkaise sen jälkeen yhtälö $x_2''(t) + 2x_2'(t) - 3x_2(t) = 0$ kun $t \geq 1$ alkuehdoilla $x_2(1) = x_1(1)$ ja $x_2'(1) = x_1'(1)$. Lausu lopuksi tehtävän ratkaisu $x(t)$ funktioiden $x_1(t)$, $x_2(t)$, sekä maalaisjärjen avulla.

5. (a) Olkoon $f(t) = \big(\sin(t)\big)^{\ln(t)}$, kun $t \in (0, \pi)$. Määritä $f'(t)$.

   (b) Osoita jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä
$$x^3 + a = \cos x$$
   on ratkaisu x kaikilla parametrin arvoilla $a \in \mathbb{R}$.

6. (a) Näytä, että $f(x) = x^5 + x$ on injektio (one-to-one) $\mathbb{R}$:ssä, ja johda tiedosta $f(1) = 6$ arvo luvulle $\left(f^{-1}\right)'(6)$.

   (b) Etsi käyrän $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$ tangentin yhtälö pisteessä $(2, -1)$.

7. (a) Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^4 - 12x + 4 = 0$ pienimmän positiivisen juuren löytämiseksi siten, että virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-4}. Perustele miksi approksimaatiosi on pienimmän positiivisen juuren approksimaatio.

   (b) Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

8. (a) Laske osittaisintegroimalla

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx.$$

   (b) Etsi funktion $f(x) = x \tan(x)$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $x = \pi$ ympäristössä.

9. Määritellään funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(t) = 1 - t$ kun $t \in [0, 1]$ ja $f(t) = 0$ kun $t > 1$. Laske tämän funktion Laplace-muunnos

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$$

jossa $s > 0$.