Tekniska högskolan
Mat-1.1010 Grundkurs i matematik L1

2. mellanförhöret 20.11.2006 kl. 16–19.
Fyll i all krävd information på alla svarspapper.
Obs: Inga kalkylatorer eller tabeller!

1. Vi definierar talföljden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ med hjälp av rekursionsformeln

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}, \quad \text{då} \quad n \geq 1.$$

Visa att följden konvergerar och bestäm dess gränsvärde.
Gott råd: pröva, gissa, visa.

2. a) Låt $x_1 < x_2$ vara irrationella. Visa att det finns ett rationellt tal mellan x_1 och x_2. Exakt motivering!
b) Vi antar att följderna $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfierar $a_n > 0, b_n > 0$ för alla n och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Visa med hjälp av definitioner att $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$.

3. a) Vi antar att den allmänna termen a_n i serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfierar för alla n

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

där $0 \leq q < 1$ är en konstant. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.
b) Undersök konvergensen av följande serier; den sista för alla värden av x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n} x^{2n}.$$

4. a) Bestäm funktionens $f\colon [0,\infty) \to B$, $f(x) = 2x/(1+x)$, värdemängd B. Visa att f är bijektiv och bestäm formen för dess inversa funktion.
b) Bilda en parametrisering i något intervall $[0,a]$ för den plana kurvan, som går från punkten $A = (2,0)$ till punkten $B = (-2,0)$ längs halvellipsen $x^2 + 4y^2 = 4,\ y \geq 0$, och återvänder till startpunkten A längs sträckan BA.

Koe suomeksi: Käännä!