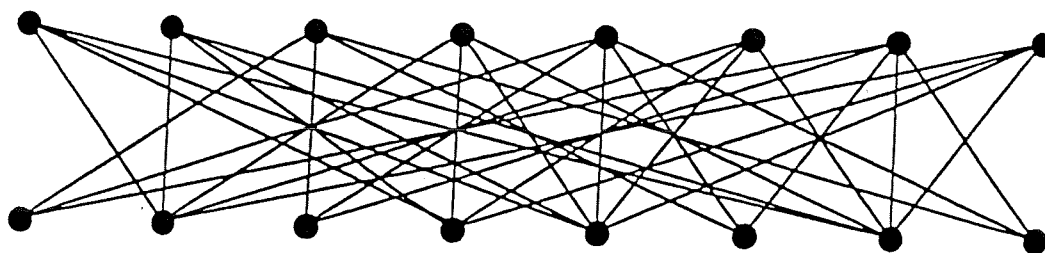


## S-72.2420/T-79.5203 Graafiteoria

Jokaisessa vastauspaperissa tulee olla merkittynä kurssin nimi, kurssikoodi, päivämäärä, oma nimi, opiskelijanumero ja OSASTO.

1. (6p.+1p.) Graafeja ja graafituloja.
  - (a) (1p.) Piirrä kaikki ei-isomorfiset suuntaamattomat 2-solmuiset graafit (sekä yhtenäiset että epäyhtenäiset).
  - (b) (2p.) Piirrä kaikki ei-isomorfiset suuntaamattomat 4-solmuiset graafit.
  - (c) (3p.+1p.) Tutustu oheiseen graafien tuloja käsittelevään Internet-sivuun. Piirrä yksi 4-solmuinen graafi, jota *ei* voida esittää tulona (tarkastellen kaikkia 256 mahdollista eri tuloa) kahdesta 2-solmuisesta graafista. Osoita, että graafilla on haluttu ominaisuus. Yhden bonuspisteen saa esittämällä ja todistamalla oikeaksi listan kaikista 4-solmuisista verkoista, joilla on haluttu ominaisuus.
2. (6p.) Pariutukset.
  - (a) (3p.) Esitä jokaiselle parilliselle  $k > 1$  yksinkertainen  $k$ -säännöllinen graafi, jolla ei ole 1-tekijää.
  - (b) (3p.) Osoita Hall'n lauseen avulla, että kuvan 1 graafin solmuille ei ole olemassa täydellistä pariutusta.



Kuva 1: Graafi tehtävään 2.

3. (6p.) Graafialgoritmit. Komentaja sijaitsee suuntaamattoman tietoliikenneverkon  $G$  solmussa  $s$ , ja komentajan alaiset verkon solmuissa  $T \subseteq V(G) \setminus \{s\}$ . Jokaiseen verkon  $G$  tietoliikenneyhteyteen  $e \in E(G)$  liittyy yhteyden katkaisuun vaadittava työ  $b(e) \in \{1, 2, \dots, n(G)\}$ . Tehtävänä on ratkaista pienin kokonaistyö, joka tarvitaan katkaisemaan komentajan yhteys kaikkiin alaisiinsa. Esitä algoritmi, joka ratkaisee tehtävän polynomisessa ajassa verkon  $G$  solmujen lukumäärän  $n(G)$  suhteen. Perustele algoritmisi oikea toiminta.

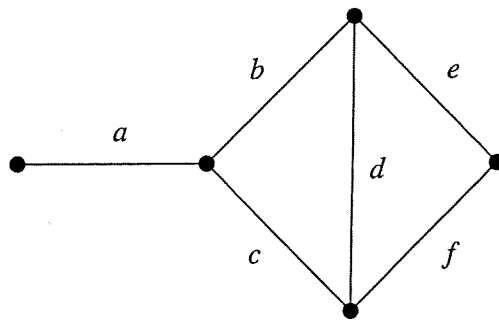
4. (6p.) Matroidit.

(a) (3p.) Tarkastellaan kuvan 2 graafin syklimatroidia. Listaa tähän matroidiin liittyvän duaalimatroidin kaikki kierrokset.

(b) (3p.) Olkoon  $M$  matroidi joukon  $E$  yli ja  $A \subseteq E$ . Määritellään alaspäin monotoninen joukkoperhe  $M'$  joukon  $E$  yli asettamalla

$$I_{M'} = \{X \in I_M : X \cap A = \emptyset\}.$$

Osoita, että  $M'$  on matroidi.



Kuva 2: Graafi tehtävään 4.