

## Mat-2.2104 Tilastollisen analyysin perusteet

Tentti 12.1.2009/Virtanen

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-2.2104 Tap 12.1.2009
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

### OHJEITA

- (i) Tehtäviä on 5 kpl.
- (ii) Yhden tehtävistä saa korvata kevään 2008 harjoitustyöllä.  
Korvattava tehtävä on ilmaistava vastauspaperissa selvästi kokonaislukuna.
- (iii) Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta esitä niin paljon perusteluita, että vastauksestasi saa selville mitä ja miksi olet tehnyt.
- (iv) Tentissä saa käyttää laskinta ja Lainisen tai Mellinin kaava- ja taulukko-kokoelmaa.



1. Kokeessa verrattiin kahaden tulostimen, A ja B, tulostusnopeuksia tulostamalla molemmalla samat 14 tehtävää. Tulokset kokeesta (kunkin tehtävän tulostusaika tunteina) on annettu alla.

Tehtävä	Tulostin	
	A	B
1	73	68
2	56	73
3	95	89
4	64	73
5	68	66
6	94	87
7	55	75

Tehtävä	Tulostin	
	A	B
8	84	88
9	73	85
10	92	96
11	99	91
12	68	86
13	44	59
14	53	67

Ongelmanasi on testata 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia  $H_0$ , jonka mukaan tulostimien A ja B tulostusnopeudet ovat yhtä suuria, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että tulostusnopeudet eivät ole yhtä suuria.

Alla on annettu yllä esitettyyn ongelmaan liittyen kaksi Statistix-ohjelman tulostusta.

**Tulostus 1.1:**

```

TWO-SAMPLE T TESTS FOR A VS B

VARIABLE          MEAN          SAMPLE          S.D.          S.E.
-----          -
A                  72.714         14              17.687         4.7271
B                  78.786         14              11.383         3.0422
DIFFERENCE        -6.0714

NULL HYPOTHESIS: DIFFERENCE = 0
ALTERNATIVE HYP: DIFFERENCE <> 0

ASSUMPTION          T          DF          P          95% CI FOR DIFFERENCE
-----
EQUAL VARIANCES    -1.08     26          0.290     (-17.626, 5.4835)
UNEQUAL VARIANCES -1.08     22.2        0.292     (-17.724, 5.5808)

TESTS FOR EQUALITY          F          NUM DF          DEN DF          P
-----
OF VARIANCES              2.41          13          13          0.0624

CASES INCLUDED 28          MISSING CASES 0

```



### Tulostus 1.2:

PAIRED T TEST FOR A - B

NULL HYPOTHESIS: DIFFERENCE = 0

ALTERNATIVE HYP: DIFFERENCE <> 0

MEAN	-6.0714
STD ERROR	2.7265
LO 95% CI	-11.962
UP 95% CI	-0.1812
T	-2.23
DF	13
P	0.0543

CASES INCLUDED 14 MISSING CASES 0

### Tehtävät:

- Tulostuksessa 1.1 on sovellettu  $t$ -testiä (josta on kaksi versiota) ja  $F$ -testiä. Esittele testit: Kerro mitä on testattu ja mitkä olivat testien tulokset.
- Tulostuksessa 1.2 on sovellettu  $t$ -testiä. Esittele testi: Kerro mitä on testattu ja mikä oli testi tulos.
- Vain toinen tulostuksissa 1 ja 2 sovelletuista  $t$ -testeistä sopii tehtävän tilanteeseen. Kumpi? Perustele valintasi.
- Tarkastellaan tulostuksessa 1.2 sovellettua  $t$ -testiä ja oletaan, että vaihtoehtoinen hypoteesi on "tulostimen A tulostusnopeus on suurempi kuin tulostimen B tulostusnopeus". Mikä on testin tulos nyt? Käytettävä riskitaso on edelleen 5%.
- Tarkastellaan tulostuksessa 1.2 sovellettua  $t$ -testiä ja oletaan, että vaihtoehtoinen hypoteesi on "tulostimen B tulostusnopeus on suurempi kuin tulostimen A tulostusnopeus". Mikä on testin tulos nyt? Käytettävä riskitaso on edelleen 5%.



2. Helsingin kaupungin puhtaanapitolaitoksen puhdistaja halusi poistaa lokit kauppatorilta. Puhdistajalla oli käytössään neljää erilaista myrkkyä lokkien likvidointiin. Myrkkyjen toimivuuden testaamiseksi puhdistaja nappasi torilta kiinni 20 lokkia. Tämän jälkeen puhdistaja jakoi lokit viiden hengen ryhmiin ja juotti kullekin ryhmälle yhtä myrkkylaatua. Yhteenveto koetuloksista (lokin elinikä millisekunneissa myrkyn nauttimisen jälkeen) on annettu alla olevassa taulukossa.

MYR1	MYR2	MYR3	MYR4
70.6	70.3	67.7	62.4
68.4	67.6	68.9	63
71.8	68.4	63.8	64.3
71.4	69.4	64.9	65.1
67	70.0	66.3	65.0

Koetulosten perusteella haluttiin siis selvittää onko myrkkylaadulla vaikutusta lokkien elinikään.

Statistix-tulokset tehdystä tilastollisesta analyysistä on annettu seuraavalla sivulla.

**Huomautus:**

Eräs viisaampi lokki halusi estää vastaamisesi ja korvasi osan tulostuksen 2.1 luvuista kysymysmerkeillä.

Lokki ei kuitenkaan tiennyt, että osaat kyllä määrätä puuttuvat luvut.

Puuttuvat luvut ovat *ryhmien sisäistä vaihtelua kuvaava neliösumma, kaikkien neliösummien vapausasteet, keskineliövirheet (MS) sekä F-testisuureen arvo.*



**Tulostus 2.1:**

ONE-WAY AOV FOR: MYR1 MYR2 MYR3 MYR4					
SOURCE	DF	SS	MS	F	P
BETWEEN	??	94.7299	????????	??????	0.0017
WITHIN	??	????????	????????		
TOTAL	??	134.589			

	CHI-SQ	DF	P
BARTLETT'S TEST OF EQUAL VARIANCES	2.18	3	0.5349

COCHRAN'S Q	0.4993
LARGEST VAR / SMALLEST VAR	5.1429

COMPONENT OF VARIANCE FOR BETWEEN GROUPS	7.13811
EFFECTIVE CELL SIZE	4.0

VARIABLE	MEAN	SAMPLE SIZE	GROUP STD DEV
MYR1	69.840	5	2.0611
MYR2	68.925	5	1.1758
MYR3	66.800	5	2.6665
MYR4	63.700	5	1.2247
TOTAL	67.506	20	1.8225

CASES INCLUDED 20      MISSING CASES 0

**Tulostus 2.2:**

BONFERRONI COMPARISON OF MEANS		
VARIABLE	MEAN	HOMOGENEOUS GROUPS
MYR1	69.840	I
MYR2	68.925	I
MYR3	66.800	I I
MYR4	63.700	.. I

THERE ARE 2 GROUPS IN WHICH THE MEANS ARE NOT SIGNIFICANTLY DIFFERENT FROM ONE ANOTHER.

CRITICAL T VALUE 3.153      REJECTION LEVEL 0.050  
STANDARD ERRORS AND CRITICAL VALUES OF DIFFERENCES VARY BETWEEN COMPARISONS BECAUSE OF UNEQUAL SAMPLE SIZES.



**Tehtävät:**

- (a) Mitä tilastollista menetelmää on käytetty?  
Mistä menetelmän nimi johtuu ja miksi nimi on hassu?
- (b) Mikä on menetelmällä testattu nollahypoteesi?  
Mikä on vaihtoehtoinen hypoteesi?
- (c) Mikä on tulostuksessa 2.1 mainitun Bartlettin testin rooli menetelmän soveltamisessa.
- (d) Laske tulostuksen 2.1 puuttuvat luvut.
- (e) Tee johtopäätökset tulostuksesta 2.1.
- (f) Tee johtopäätökset tulostuksesta 2.2.

3. Erästä tappavaa tautia vastaan on kehitetty rokote. Rokotuksen tehon selvittämiseksi järjestettiin seuraava rokotuskoe. Kokeen kohteiksi valitut henkilöt jaettiin satunnaisesti kahteen ryhmään:

Ryhmä 1 (CASE = 1): Rokotetut

Ryhmä 2 (CASE = 2): Ei-rokotetut

Kokeessa rekisteröitiin rokotusta seuranneen vuoden aikana sairastuneiden ja ei-sairastuneiden lukumäärät.

Kokeen tulokset on annettu alla olevassa 2×2-frekvenssitaulukossa.

CASE	VARIABLE	
	SAIRASTUI	TERVE
1	8	42
2	20	30

Kokeen tekijät halusivat tutkia tilastollisesti ovatko rokotus ja sairastuminen riippumattomia tekijöitä. Tulokset tehdystä tilastollisesta analyysistä on annettu tehtävän alla.



**Huomautus:**

Painovirhepaholainen halusi estää vastaamisesi ja korvasi osan tulostuksen luvuista kysymysmerkeillä. Paholainen ei kuitenkaan tiennyt, että puuttuvat luvut voidaan laskea jäljelle jääneistä luvuista.

Puuttuvat luvut ovat *havaintojen kokonaislukumäärä*, solun (CASE = 1, SAIRASTUI) *odotettu frekvenssi*, solun (CASE = 2, SAIRASTUI)  $\chi^2$ -*arvo*, koko frekvenssitaulua vastaava  $\chi^2$ -*testisuureen arvo* ja *vapausasteiden lukumäärä*.

**Tehtävät:**

- (a) Mitä testiä sovellettiin?  
Kuvaa testiä ja sen käyttöä lyhyesti.
- (b) Laske puuttuvat luvut.
- (c) Tee johtopäätökset tilastollisen analyysin tuloksista.  
Olisitko halukas suosittelisitko rokotusta analyysituloksen perusteella?  
Pohdi asiaa siinä valossa, että ko. tauti on vakava.
- (d) Eräs toinen testi tehdään teknisesti samaan tapaan kuin tehtävässä sovellettu testi. Mikä tämän toisen testin nimi on ja mitä tässä toisessa testissä testataan?

Statistix 8.1  
12:40:54 PM

5/4/2007,

**Chi-Square Test for Heterogeneity or Independence**

Case		Variable		
		sairastui	terve	
1	Observed	8	42	50
	Expected	14.00	?????	
	Cell Chi-Sq	2.57	1.00	
2	Observed	20	30	50
	Expected	14.00	36.00	
	Cell Chi-Sq	2.57	????	
		28	72	???
Overall Chi-Square		????		
P-Value		0.0075		
Degrees of Freedom		?		

Cases Included 4 Missing Cases 0



4. STATISTIX-tiedostossa CITYDAT on seuraavat muuttujat:

- HSEVAL = Omakotitalojen hintojen keskiarvo
- SIZEHSE = Talojen mediaanikoko
- TAXRATE = Kiinteistöverosuhte
- TOTEXP = Kunnallispalveluihin käytetty rahamäärä
- COMPER = Vuokratalojen osuus

Aineisto koostuu 90 USA:n kuntaa koskevista tiedoista.

Havainnoista on estimoitu lineaarinen regressiomalli

$$(4.1) \quad HSEVAL = \beta_0 + \beta_1 SIZEHSE + \beta_2 TAXRATE + \beta_3 TOTEXP + \beta_4 COMPER + \varepsilon$$

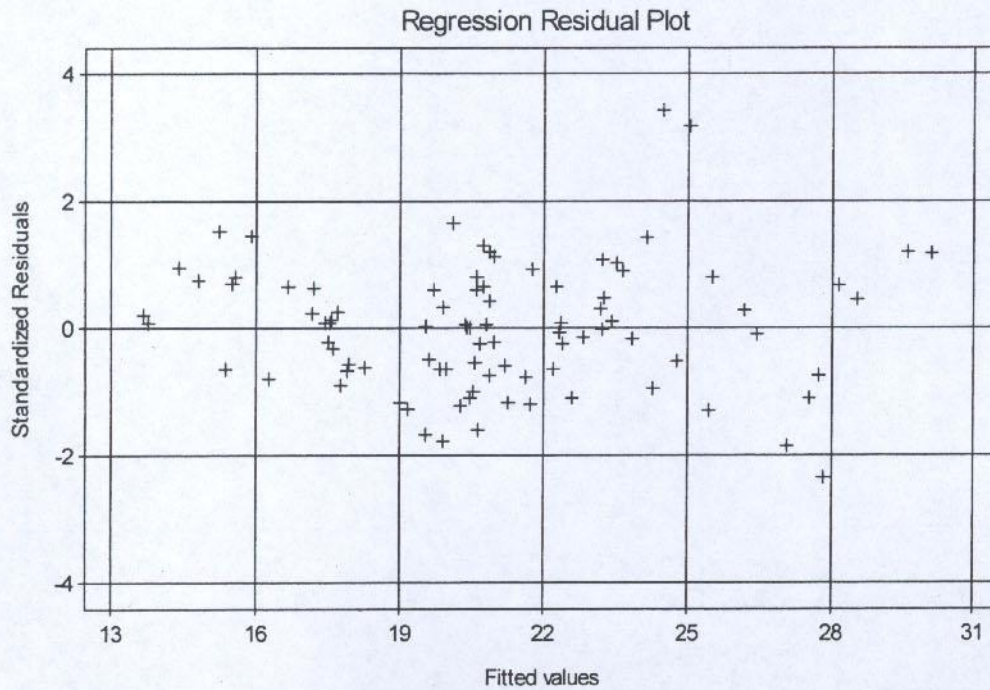
Mallin tavoitteena on selvittää erilaisten taustatekijöiden vaikutus omakotitalojen keskimääräiseen hintaan.

Estimointitulokset mallista (4.1) on annettu alla:

STATISTIX FOR WINDOWS					CITYDAT
UNWEIGHTED LEAST SQUARES LINEAR REGRESSION OF HSEVAL					
PREDICTOR VARIABLES	COEFFICIENT	STD ERROR	STUDENT'S T	P	VIF
CONSTANT	-23.4328	8.98561	-2.61	0.0108	
SIZEHSE	9.21014	1.56419	5.89	0.0000	1.1
TAXRATE	-177.534	39.8668	-4.45	0.0000	1.0
TOTEXP	1.423E-06	2.963E-07	4.80	0.0000	1.1
COMPER	-20.3704	6.19937	-3.29	0.0015	1.2
R-SQUARED	0.5505	RESID. MEAN SQUARE (MSE)		11.5623	
ADJUSTED R-SQUARED	0.5294	STANDARD DEVIATION		3.40033	
SOURCE	DF	SS	MS	F	P
REGRESSION	4	1203.84	300.960	26.03	0.0000
RESIDUAL	85	982.792	11.5623		
TOTAL	89	2186.63			
CASES INCLUDED 90		MISSING CASES 0			



Kuva alla esittää estimoidun mallin (4.1) standardoituja residuaaleja:



Residuaaleihin on sovitettu *apuregressio*

$$(4.2) \quad e_j^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{y}_j + \delta_j$$

jossa

$e_j$  = estimoidun mallin residuaali

$\hat{y}_j$  = estimoidun mallin sovite

Estimointitulokset *apuregressiosta* (4.2) on annettu seuraavalla sivulla.



STATISTIX FOR WINDOWS				CITYDAT	
UNWEIGHTED LEAST SQUARES LINEAR REGRESSION OF RESSQR					
PREDICTOR VARIABLES	COEFFICIENT	STD ERROR	STUDENT'S T	P	
CONSTANT	-15.0943	11.9630	-1.26	0.2104	
FIT	1.23697	0.56043	2.21	0.0299	
R-SQUARED	0.0525	RESID. MEAN SQUARE (MSE)	378.099		
ADJUSTED R-SQUARED	0.0417	STANDARD DEVIATION	19.4448		
SOURCE	DF	SS	MS	F	P
REGRESSION	1	1841.99	1841.99	4.87	0.0299
RESIDUAL	88	33272.7	378.099		
TOTAL	89	35114.7			
CASES INCLUDED 90		MISSING CASES 0			

Apuregression (4.2) selitysteesta  $R^2$  laskettiin testisuure

$$(4.3) \quad nR^2 = 90 \times 0.0525 = 4.725$$

jossa on  $n$  on havaintojen lukumäärä.

Erään nollihypoteesin pätiessä

$$nR^2 \sim \chi^2(1).$$

Testisuureen (4.3) arvoa 4.725 vastaava p-arvo on 0.02973.

### Tehtävät:

- Ovatko kaikki mallin (4.1) regressiokertoimet merkitseviä 1 %:n merkitsevyystasolla?
- Mikä on estimoidun mallin (4.1) selityste? Mitä johtopäätöksiä voit tehdä tulostuksen  $F$ -testistä?
- Mikä on suureiden R-SQUARED ja ADJUSTED R-SQUARED ero?
- Onko multikollineaarisuus ollut estimoinnissa ongelma?
- Miksi alkuperäisen regressiomallin (4.1) residuaaleihin on sovitettu apuregressio (4.2)?
- Mitä nollihypoteesia testisuureella (4.3) on testattu? Mikä on testin tulos?



5. Tutkimuksessa haluttiin selvittää tietokoneen prosessorin nopeuden ja RAM-muistin koon vaikutus laskenta-aikaan monimutkaisissa matemaattisissa laskutoimituksissa.

Kokeeseen valittiin kaksi prosessoria (144 MHz ja 400 MHz) ja kaksi muistikokoa (128 MB ja 256 MB). Sama matemaattinen ohjelma ajettiin jokaisella nopeusmuistikoko-kombinaatiolla kolme kertaa niin, että jokaisesta kombinaatiosta saatiin 3 havaintoa.

Tulokset kokeesta (suoritusajat; 1/1000 s) on annettu alla olevassa tulostuksessa.

Suoritus aika (1/1000 s)		Prossessorin nopeus	
		144 MHz	400 MHz
RAM	128 MB	30	16
		26	9
		16	11
	256 MB	22	6
		12	10
		14	8

Koetulosten perusteella haluttiin selvittää millaisia vaikutuksia prosessorin nopeudella ja RAM-muistin koolla on ko. tehtävän suoritus aikaan.

Statistix-tulostus tehdystä tilastollisesta analyysistä on annettu alla.

**Huomautus:**

Painovirhepahalainen halusi estää vastaamisesi ja korvasi osan tulostuksen luvuista kysymysmerkeillä. Paholainen ei kuitenkaan tiennyt, että osaat kyllä määrätä puuttuvat luvut.

Puuttuvat luvut ovat *jäännöseliösumma*, *kaikkien neliosummien vapausasteet*, *keskineliövirheet (MS)* sekä *F-testisuureiden arvot*.

**Tulostus 5.1:**

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE FOR AIKA					
SOURCE	DF	SS	MS	F	P
RAM (A)	??	108.000	????????	??????	0.0678
PROSNOP (B)	??	300.000	????????	??????	0.0079
A*B	??	12.000	????????	??????	0.5017
RESIDUAL	??	????????	????????		
TOTAL	??	614.000			



**Tehtävät:**

- (a) Mitä tilastollista menetelmää on käytetty?  
Kuvaa käytetyn menetelmän tavoitetta lyhyesti.
- (b) Mitkä ovat menetelmällä testatut nollahypoteesit?
- (c) Laske tulostuksen 5.1 puuttuvat luvut.
- (e) Tee johtopäätökset tulostuksesta 5.1.