T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

2. välikoe, pe 13.3.2009 klo 9-12, A.

1. vk on oikeus tehdä vain kerran joko 7.3. tai 13.3.

Välikokeessa ei saa olla mitään omia laskimia eikä taulukkokirjoja. Välikokeessa jaetaan kurssin taulukkomoniste sekä palautuslomake tehtävää 1 varten.

Palautusohjeet:

- tehtävän 1 ("rasti ruutuun") lomake omaan pinoon, täytettävä vähintään opiskelijanumero
- tehtävän 2 esseen vastauskonsepti omaan pinoon, täytettävä vähintään konseptin ylälaidan tiedot
- suttupaperit omaan pinoon
- tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää itsellään

Tehtävä 3 on taustatietokysely ja palaute, joka täytetään nettilomakkeella la 7.3. - ma 23.3.2009.

1) (0-12 p) Monivalinta. Väittämissä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse korkeintaan **yksi ja vain yksi.** Täytä **erillisille lomakkeelle,** joka luetaan optisesti.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta −0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

1.1 Tutkitaan sekvenssiä $x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$, jossa osasekvenssien perusjaksot ovat $N_1 = 4$, $N_2 = 8$ ja $N_3 = 20$. Mitä voidaan sanoa sekvenssin $x[n]$ jaksollisuudesta?

(A) Perusjaksoa N_0 ei ole olemassa

(B) Perusjakso on $N_0 = 20$

(C) Normalisoitu peruskulmataajuus on $\omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/20$

(D) Sekvenssi on jaksollinen jaksolla $N = 4 \cdot 8 \cdot 20 = 640$

1.2 Lasketaan lukujonojen $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] = \{1,\ \underline{1},\ 2\}$ ja $h[n] = \delta[n+1] - \delta[n] = \{1,\ \underline{-1}\}$ lineaarinen konvoluutio $y[n] = h[n] \circledast x[n]$. Alleviivaus osoittaa origon paikkaa.

(A) $y[n] = 0$, kun $n < 0$

(B) Lukujonon $y[n]$ ensimmäinen vasemmalta nollasta poikkeava arvo löytyy kohdasta $n = 1$

(C) $y[0] = -1$

(D) $y[0] = 1$

1.3 Lasketaan dekonvoluutiota, kun $y[n] = h[n] \circledast x[n]$ ja tiedetään, että impulssivaste $h[n] = \{1,\ \underline{-2}\}$ ja $y[n] = \{\underline{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ -d\}$, joissa alleviivaus osoittaa origon paikkaa. Tällöin syöte $x[n]$ on muotoa

(A) $x[n] = 2 \cdot \delta[n+1] - d \cdot \delta[n-3]$

(B) $x[n] = 2 \cdot \delta[n+1] + a \cdot \delta[n] + b \cdot \delta[n-1] + c \cdot \delta[n-2] + d \cdot \delta[n-3]$

(C) $x[n] = 2 \cdot \delta[n-1] + c \cdot \delta[n-5]$

(D) $x[n] = 2 \cdot \delta[n-1] + a \cdot \delta[n-2] + b \cdot \delta[n-3] + c \cdot \delta[n-4]$

joissa $\{a,\ b,\ c,\ d\} \in \mathbb{R}$ ja nollasta poikkeavia.

1.4 LTI-järjestelmää kuvataan differenssiyhtälöllä $y[n] - 0.1y[n-1] + 0.2y[n-2] = 0.5x[n] + 0.5x[n-2]$

(A) Järjestelmää vastaava piirrosesitys on kuvassa 1(a)

(B) Järjestelmää vastaava piirrosesitys on kuvassa 1(b)

(C) Suodin on FIR-tyyppinen

(D) Suodin ei ole kausaalinen

1.5 Suotimen magnitudivaste on

$$|H(e^{j\omega})| = K \cdot \frac{|1 - 0.3\,e^{-j\omega}| \cdot |1 + e^{-j\omega}|}{|1 - 0.9j\,e^{-j\omega}| \cdot |1 + 0.9j\,e^{-j\omega}|}$$

(A) $|H(e^{j\omega})| = 0$, kun $\omega = 0$

(B) $|H(e^{j\omega})| \to \infty$, kun $\omega \to 0.9$

(C) Suotimen impulssivaste $h[n]$ on symmetrinen

(D) Jos näytteenottotaajuutena on $f_T = 44100$ Hz, suotimen maksimivahvistus saadaan noin taajuudella $f \approx 11$ kHz

1.6 LTI-suotimen differenssiyhtälö on $y[n] = x[n] - 1.8x[n-1] + 0.82x[n-2] + 0.2y[n-1] + 0.15y[n-2]$. Suotimen magnitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ skaalattuna välille $0 \dots 1$ on

(A) kuvassa 2(a)

(B) kuvassa 2(b)

(C) kuvassa 2(c)

(D) kuvassa 2(d)

1.7 Stabiilin digitaalisen kuudennen asteen LTI-suotimen, jonka impulssivasteen $h[n]$ kertoimet ovat reaalisia,

(A) taajuusvaste $H(e^{j\omega})$ on jaksollinen 6π:n välein: $H(e^{j(\omega_0)}) = H(e^{j(6\pi+\omega_0)})$ kaikille ω_0

(B) vaihevaste $\angle H(e^{j\omega})$ on symmetrinen y-akselin suhteen: $\angle H(e^{j(-\omega_0)}) = \angle H(e^{j(+\omega_0)})$ kaikille ω_0

(C) ryhmäviive $\tau(\omega) = 6$ kaikille ω_0

(D) napanollakuvion kaikki kuusi napaa ovat aina yksikköympyrällä

1.8 Katso jatkuva-aikaisen reaalisen signaalin spektriä $|X(j\Omega)|$ kuvan 3 ylärivillä. Näytteistetään taajuudella $f_s =$ 10 kHz. Sekvenssin $x[n]$ spektri on kuvan 3 alarivin

(A) (a)

(B) (b)

(C) (c)

(D) (d)

1.9 Kuvassa 4 on kuvakaappaus Audacity-ohjelmasta, jossa analysoidaan ääninäytettä välillä noin 20.40...21.30 s. Signaalin näytteenottotaajuus on $f_T = 22050$ Hz. Lisäksi maalatusta noin 50 ms alueesta on laskettu spektriestimaatti.

(A) Ääninäytteessä sanotaan: "I love DSP"

(B) Ääninäyte edustaa laajakaistaista kohinaa

(C) Ääninäyte maalatussa alueessa ei ole matemaattisen määritelmän mukaan jaksollinen ($x(t) \equiv x(t+T)$) mutta "melkein jaksollinen" ("quasi-periodic")

(D) Jos tiedetään, että ääni on peräisin pianosta, niin spektrin mukaisesti siinä on painettu kahdeksaa vierekkäistä kosketinta samanaikaisesti

1.10 Olkoon tunnettuna sekvenssi $x[n] = \delta[n-K] + \delta[n-K-1]$, jossa $K \in \mathbb{Z}_+$. Lasketaan lineaarista konvoluutiota

$$y[n] = x[n] \circledast (x[n] \circledast (x[n] \circledast (x[n] \circledast (x[n] \circledast x[n]))))$$

(A) Sekvenssin $y[n]$:n pituus on $L_y(K) = 6K - 5$

(B) $y[n] = 0$, kun $n \geq 7$

(C) Summa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = 64$

(D) Mikään ylläolevista ei pidä paikkaansa

1.11 Suotimen impulssivaste on $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\delta[n-2k] - 2\delta[n-2k-1])$

(A) Suotimen napanollakuvio on kuvassa 5

(B) Suotimen siirtofunktio on $H(z) = \frac{2}{1-z^{-1}}$

(C) Suodin on epästabiili

(D) Suodin on alipäästösuodin

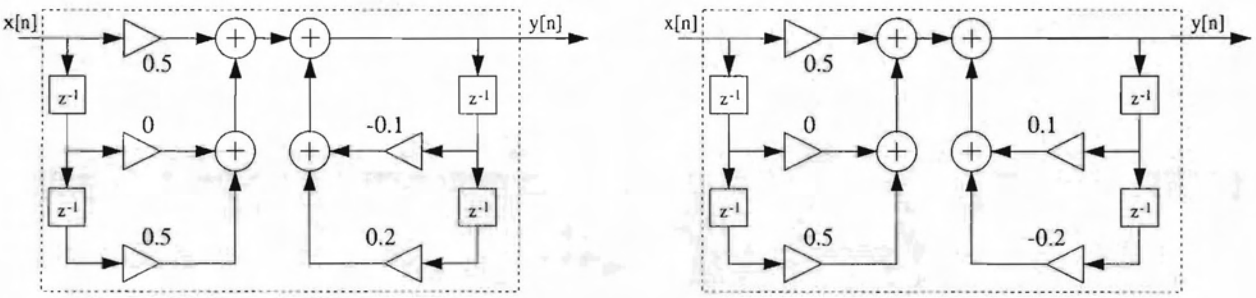
1.12 Tutkitaan LTI-suodinta $H(z) = 1 + 0.1z^{-10}$

(A) Suotimen napanollakuvio on kuvassa 6(a)

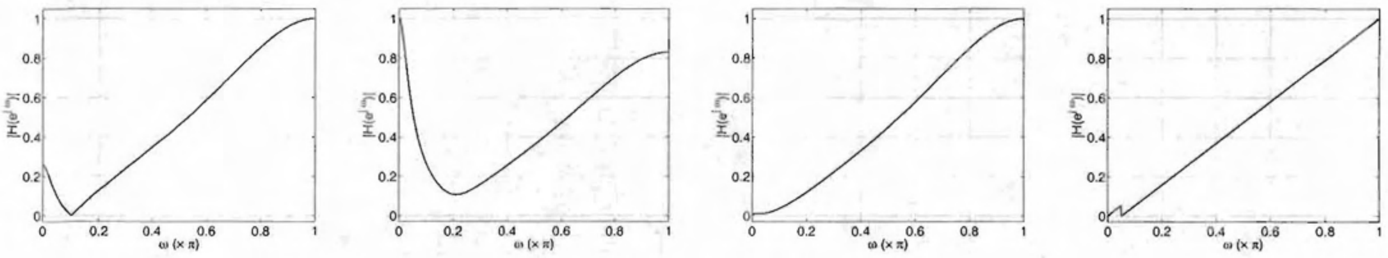
(B) Suotimen magnitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ kuvassa 6(b)

(C) Impulssivasteen $h[n]$ pituus on 10

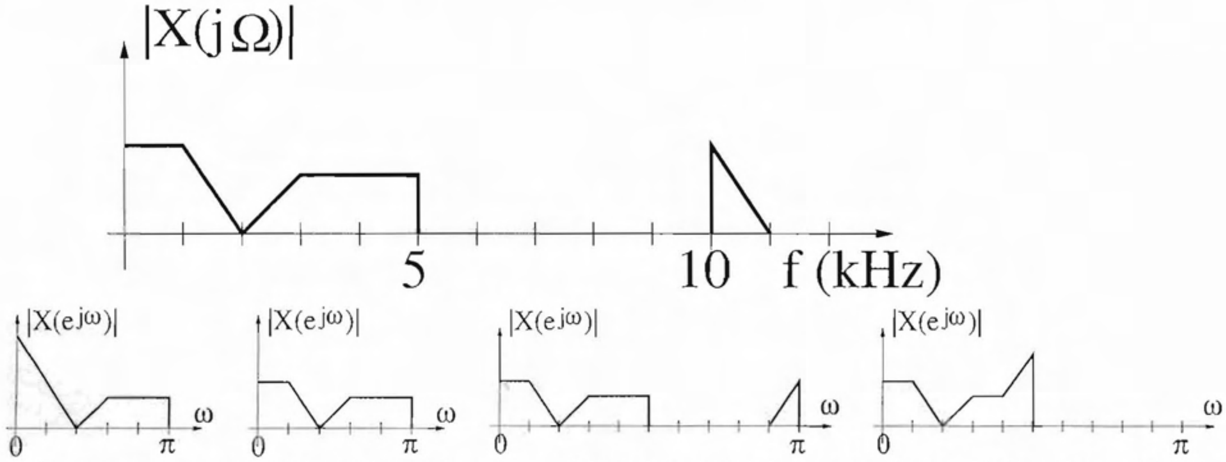
(D) Suotimen ryhmäviive $\tau(\omega)$ on vakio



Kuva 1: Tehtävä 1.4, vaihtoehdot (**A**) ja (**B**) .



Kuva 2: Tehtävä 1.6, vaihtoehdot (**A**) , (**B**) , (**C**) , (**D**) .

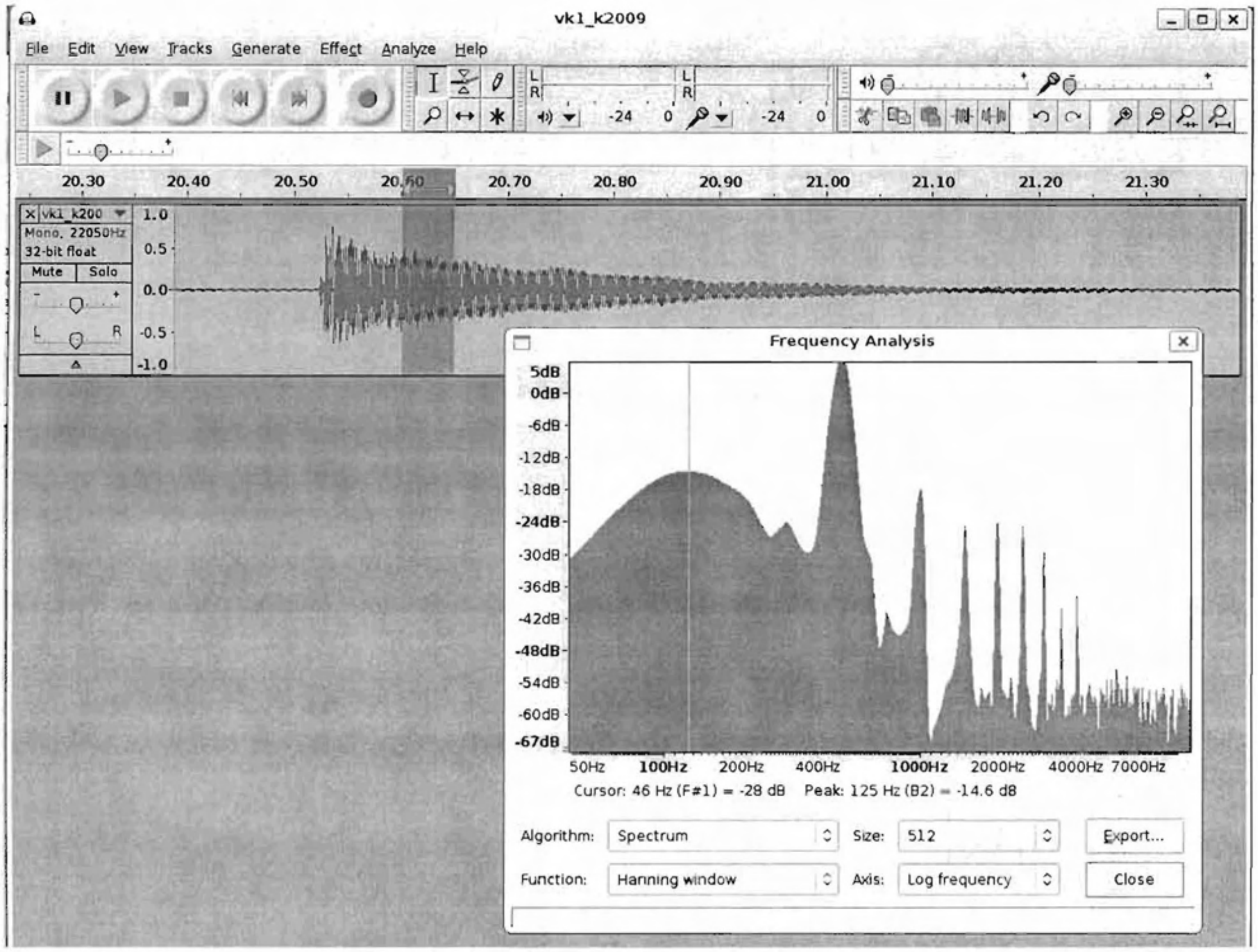


Kuva 3: Tehtävän 1.8 kuvia. Ylärivi: jatkuva $X(j\Omega)$, alarivi: vaihtoehdot (**A**) , (**B**) , (**C**) , (**D**)

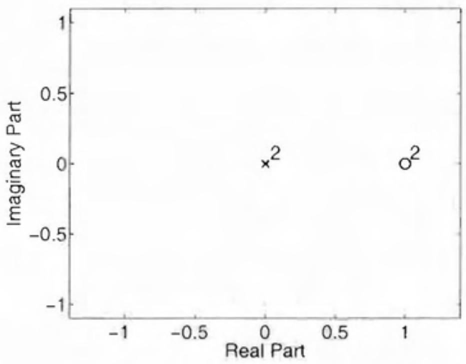
2) (6 p) Tämän kurssin alkupuoliskolla on tutkittu pääosin syötteitä $x[n]$, niitä muokkaavia digitaalisia LTI-järjestelmiä $h[n]$ ja vasteita $y[n]$. Näitä voidaan käsitellä sekä aika- että taajuustasossa.

Kirjoita essee aiheesta "signaalien suodattaminen digitaalisilla LTI-suotimilla".

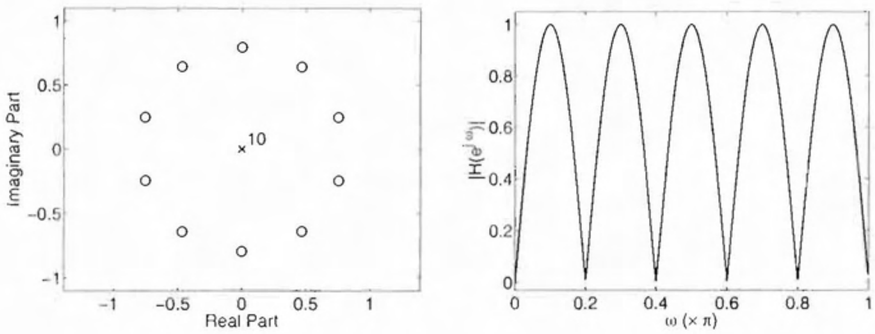
3) (1 p) Taustatietojen kysely ja palaute. Nettilomake `http://www.cis.hut.fi/Opinnot/T-61.3010/VK1_K2009/kyselyVK1.shtml` on avoinna 23.3.2009 asti.



Kuva 4: Tehtävä 1.9, kuvakaappaus ohjelmasta Audacity.



Kuva 5: Tehtävä 1.11, vaihtoehto (A) .



Kuva 6: Tehtävä 1.12, vaihtoehdot (~~B~~) ja (~~D~~) .
A B

T-61.3010 DSP Table of formulas, spring 2009

Disclaimer! Notations, e.g. ω or Ω, may vary from book to book, or from exam paper to other.

Basic math stuff

Even and odd functions:

$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$

$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$

Roots of second-order polynomial:

$ax^2 + bx + c = 0,\ x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

Logarithms, decibels:

$\log\big((A \cdot B/C)^D\big) = D \cdot \big(\log A + \log B - \log C\big)$

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

decibels: $10\log_{10}(B/B_0)$, $20\log_{10}(A/A_0)$

$10\log_{10}(0.5) \approx -3.01$ dB, $20\log_{10}(0.5) \approx -6.02$ dB

$20\log_{10}(0.1) = -20$ dB, $20\log_{10}(0.01) = -40$ dB

Complex numbers, radii, angles, unit circle:

$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$

$z = x + jy = r\,e^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan(y/x) + n\pi,\ (n = 0,\ \text{if } x > 0, n = 1,\ \text{if } x < 0)$

$x = r\,\cos(\theta),\ y = r\,\sin(\theta)$

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\,\sin(\theta)$ (*Euler's formula*)

$\cos(\theta) = (1/2) \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}),\ \sin(\theta) = (1/2j) \cdot (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)},\ z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|,\ \angle(A \cdot B) = \angle A + \angle B$

$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta)$

$z_k = \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r\,e^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}|\,e^{j(\theta + 2\pi k)/N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1$

Trigonometric functions:

$1° = \pi/180$ radians ≈ 0.01745 rad, 1 rad $= 180°/\pi \approx 57.30°$

$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$

$\sin(\theta)/\theta \to 1$, when $\theta \to 0$; $\text{sinc}(\theta) \to 1$, when $\theta \to 0$

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (Taylor)

$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ (Taylor)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0

$\pi \approx 3.1416,\ \sqrt{3}/2 \approx 0.8660,\ \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$

Geometric series:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\quad |a| < 1$

$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a},\quad |a| < 1$

Continuous-time unit step and unit impulse fun.:

$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt}\mu_\Delta(t),\quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$ (Dirac's delta)

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)\,dt = x(t_0)$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi \int \delta(t) \cdot 1\,dt = 2\pi$, when $t = 0$, and $= 0$ elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions:

$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

E.g. $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1] = \{2, \underline{1}, -1\}$, $x[-1] = 2,\ x[0] = 1,\ x[1] = -1$.

Periodic signals

$\exists T \in \mathbb{R} : x(t) = x(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$

$\exists N \in \mathbb{Z} : x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$

Fundamental period T_0, N_0 is the smallest $T > 0$, $N > 0$.

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)\,d\tau$

$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$

$y_C[n] = h[n] \circledN x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[< n - k >_N]$

Correlation:

$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n - l] = x[l] \circledast y[-l]$

$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n - l]$

Mean and variance of random signal:

$m_X = \mathrm{E}[X] = \int x p_X(x)dx$

$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x)dx = \mathrm{E}[X^2] - m_X^2$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here f_s (also f_T later) is the sampling frequency.

Frequency f, $[f] = \text{Hz} = 1/\text{s}$.

Angular frequency $\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $[\Omega] = \text{rad/s}$ (analog).

Normalized angular frequency $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$, $[\omega] =$ rad/sample (digital).

Normalized frequency in Matlab $f_{MATLAB} = 2f/f_s$, $[f_{MATLAB}] = 1/\text{sample}$.

Sampling of $x_a(t)$ by sampling frequency f_T

$x_p[n] = x_a(nT) = x_a(n/f_T)$

$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_T))$

Integral transforms. Properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity. All transforms are linear.

$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,

$x[n - k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$

Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g.,

$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$

Conjugate symmetry $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$, then $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,

$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$, $nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

Duality. Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain $x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ and multipication property, vice versa, $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega - \theta)})\,d\theta$

Parseval's relation. Energy in signal and spectral components: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

Fourier series of continuous-time periodic signals:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jk\Omega_0 t}$ (synthesis)

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$ (analysis)

$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$

$e^{jM\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$

$\int_T x_a(\tau)x_b(t - \tau)\,d\tau \leftrightarrow Ta_k b_k$

$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{k-l}$

$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega$ (synthesis)

$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt$ (analysis)

$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}X(j\Omega)$

$e^{j\Omega_k t}x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$

$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega)X_b(j\Omega)$
$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) \circledast X_b(j\Omega)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
$tx(t) \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$
$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$
$\delta(t) \leftrightarrow 1$
$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$
$e^{-at}\mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$, where $\mathcal{R}eal\{a\} > 0$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):
$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega$ (synthesis)
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$, periodic with 2π (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$
$nx[n] \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_l[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$
$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi\sum_l[\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$
$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - 2\pi l)$
$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \le N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$
$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$, $|a| < 1$

N-point Discrete Fourier-transform (DFT):
Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
$W_N = e^{-j2\pi/N}$
$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}$, $0 \le n \le N-1$ (synthesis)
$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$, $0 \le k \le N-1$ (analysis)
$x[< n - n_0 >_N] \leftrightarrow W_N^{-kn_0}X[k]$
$W_N^{-nk_0}x[n] \leftrightarrow X[< k - k_0 >_N]$
$y_C[n] = h[n] \textcircled{N}\, x[n] \leftrightarrow H[k] \cdot X[k] = Y[k]$

Laplace transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$
$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$ (synthesis)
$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t$ (analysis)

z-transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to discrete-time Fourier-transform: $z = e^{j\omega}$
$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$, C in ROC of $X(z)$ (synthesis)
$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k}X(z)$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC all z
$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}$, all z, except 0 ($k > 0$) or ∞ ($k < 0$)
$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$
$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| < 1$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$
$na^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
$(n+1)a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
$r^n\cos(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$, $|z| > |r|$
$r^n\sin(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$, $|z| > |r|$

LTI filter analysis
Stability $\sum_n |h[n]| < \infty$; unit cirle belongs to ROC
Causality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROC
Unit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$
Causal transfer function of order $\max\{M, N\}$:
$H(z) = B(z)/A(z) = K \cdot \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(1-d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-p_n z^{-1})}$
Zeros d_m: $B(z) = 0$; *Poles* p_n: $A(z) = 0$
Frequency, magnitude/amplitude, phase response, $z \leftarrow e^{j\omega}$
$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\angle H(e^{j\omega})}$
$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$
$H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
Group delay $\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\angle H(e^{j\omega})$
Four types of linear-phase FIR filters, $h[n] = h[N-1-n]$ (even/odd symmetric), or $h[n] = -h[N-1-n]$ (e/o antis.).
Zeros symmetric w.r.t. unit circle: $r\, e^{\pm j\theta}$ and $(1/r)\, e^{\mp j\theta}$.
Important *transform pairs and properties*:
$a\,\delta[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega} \leftrightarrow a\, z^{-k}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow 1/[1 - a\, e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1 - a\, z^{-1}]$
$h[n] = \sum_i (k_i \cdot a_i^n\mu[n]) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \ldots$
$\ldots \sum_i (k_i/[1 - a_i\, e^{-j\omega}]) \leftrightarrow H(z) = \sum_i (k_i/[1 - a_i\, z^{-1}])$
$a\, x[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a\, z^{-k}X(z)$
$y[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
rectangular $\leftrightarrow$ sinc, sinc $\leftrightarrow$ rectangular

LTI filter design (synthesis)
Bilinear transform $H(z) = H(s)|_s$ and *prewarping*
$s = k \cdot (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$, $k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
$\Omega_{prewarp,c} = k \cdot \tan(\omega_c/2)$, $k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off
LP-LP $z^{-1} = (\hat{z}^{-1} - \alpha)/(1 - \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = \sin(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))/\sin(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))$
LP-HP $z^{-1} = -(\hat{z}^{-1} + \alpha)/(1 + \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = -\cos(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))/\cos(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))$
Windowed Fourier series method
$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c \end{cases} \leftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\omega_c n}{\pi})$
$h_{FIR}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$
$H_{FIR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta$
Fixed window functions, order $N = 2M$, $-M \le n \le M$:
Rectangular $w[n] = 1$
Hamming $w[n] = 0.54 + 0.46\cos((2\pi n)/(2M))$
Hann $w[n] = 0.5 \cdot (1 + \cos((2\pi n)/(2M)))$
Blackman $w[n] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$
Bartlett $w[n] = 1 - (|n|/M)$

Implementation
Radix-2 DIT FFT butterfly equations
$\begin{cases} \Psi_{r+1}[\alpha] & = \Psi_r[\alpha] + W_N^l\Psi_r[\beta] \\ \Psi_{r+1}[\beta] & = \Psi_r[\alpha] - W_N^l\Psi_r[\beta] \end{cases}$

Multirate systems
Upsampling (interpolation) with factor L, $\boxed{\uparrow L}$
$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ x_u[n] = 0, \text{ otherwise} \end{cases}$
$X_u(z) = X(z^L)$, $X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$
Downsampling (decimation) with factor M, $\boxed{\downarrow M}$
$x_d[n] = x[nM]$
$X_d(z) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M}W_M^{-k})$,
$X_d(e^{j\omega}) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$

Oikeat vastaukset:

1.1: CD
1.2: D
1.3: D
1.4: B
1.5: D
1.6: C
1.7: A
1.8: A
1.9: C
1.10: C
1.11: C
1.12: A

Kommentteja:

1.4: (B) y[n] = 0.1 y[n-1] - 0.2 y[n-2] + ...

1.5: (D) Poles +- 0.9 j => bandpass filter at pi/2

1.10: (C) [1 1]*[1 1] => [1 2 1], [1 2 1]*[1 1] => [1 3 3 1]...
binomial coefficients, Pascals triangle [1 6 15 20 15 6 1]

1.12: h[n] is _not_ symmetric, cannot be (D)