

T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

1/4

Kesätentti, ma 5.6.2006 klo 17-20. /Simula, Parviainen

Tilaisuudessa ei saa olla omaa taulukkokirjaa. Graafinen laskin sallittu. Tilaisuudessa jaetaan kurssin taulukkomoniste.

Kaikki konseptit palautettava, suttupaperit erikseen. Tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää.

Aloita uusi tehtävä **uudelta sivulta**. Kirjoita laskuissa käytettytä välivaiheet mukaan.

- 1) (7 x 1p = 0-6 p) Monivalinta. Väittämässä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi**.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta -0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaan niin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 6 ja minimimäärä 0.

1.1 Sekvenssin $x[n] = \sin(0.25\pi n^2 + 0.25)$

- (A) perusjakso on $N_0 = 2$
- (B) perusjakso on $N_0 = 4$
- (C) perusjakso on $N_0 = 8$
- (D) perusjakso on $N_0 = 16$

1.2 LTI-suotimen taajuusvaste on $H(e^{j\omega}) = 2e^{-j3\omega} - e^{-j\omega} - e^{j\omega} + 2e^{j3\omega}$. Tällöin

- (A) taajuusvaste on (lähes aina) kompleksiarvoinen
- (B) taajuusvaste on aina reaalinen ja positiivinen
- (C) vaihevaste on lineaarinen
- (D) suotimen ryhmäviive on nolla

1.3 Sekvenssit $x[n]$ ja $h[n]$ konvoloidaan keskenään ja lopputuloksesta otetaan z -muunnos suppenemisalueessaan ("ROC")

$$\begin{aligned} Z\{x[n] \circledast h[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}z^{-k} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \right) \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} \right) \end{aligned}$$

Mitä yllä olevasta johdosta voidaan sanoa?

- (A) Ollaan johdettu, että taajuustason konvoluutio vastaa aikatason kertolaskua
- (B) Ollaan johdettu, että aikatason konvoluutio vastaa taajuustason kertolaskua
- (C) Johdossa ei saa tehdä muuttujanvaihdosta $m = n - k$

- (D) Johdossa on muita virheitä kuin c-kohdassa esitetty

- 1.4 Kuvan 1(a) suodin

- (A) siirtofunktio on $H(z) = \frac{0.8+1.2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.2z^{-1}-0.8z^{-2}}$
- (B) on kokopäästösuođin ("allpass")
- (C) on viiveiden suhteiden kanoninen rakenne
- (D) on FIR-tyyppinen

- 1.5 Analogisuodin $H(s) = 1/(s + 0.5)$ muutetaan digitaaliseksi $H(z)$ käyttäen bilineaarimuunnosta. Digitaalinen suodin on

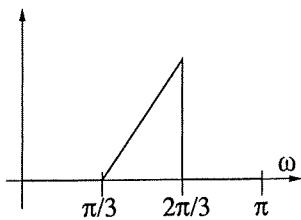
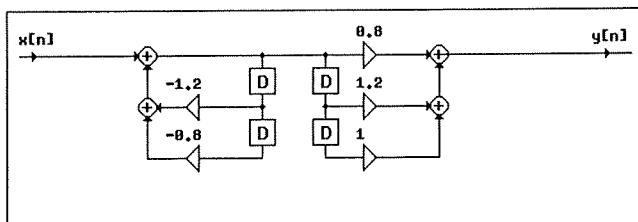
- (A) $H(z) = 1/(z^{-1} + 0.5)$
- (B) $H(z) = 2/(1 + 2z^{-1})$
- (C) $H(z) = (2/3) \cdot (1 + z^{-1})/(1 - (1/3)z^{-1})$
- (D) $H(z) = (1 + z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1})$

- 1.6 Jotta signaali ei vierastu ("aliasing") näytteistykessä, näytteenottovälin T_s tulee olla

- (A) sama kuin sen signaalikomponentin perusjakso T_0 , jolla on pisin perusjakso
- (B) vähintään kaksi kertaa niin pitkä kuin signaalin korkeimman taajuuden perusjakson T_0
- (C) vähintään puoli kertaa niin suuri kuin signaalin korkeimman taajuuden f_h
- (D) enintään puolet signaalin korkeimman taajuuden perusjakosta T_0

- 1.7 Reaalisen digitaalisen signaalin spektri $|X(e^{j\omega})|$ on kuvan 1(b) mukainen. Spektri on kaistaraajottu välille $\pi/3 \leq \omega \leq 2\pi/3$. Signaalin näytteenottotaajuus korotetaan kolminkertaiseksi, ts. "upsämpäätää" tekijällä $L = 3$. Tämän jälkeen signaalin taajuuskomponentteja löytyy väliltä $0 \leq \omega \leq \pi$:

- (A) ei missään
- (B) kaikissa kohdissa
- (C) kohdissa $\pi/3 \leq \omega \leq 2\pi/3$
- (D) kohdissa $\pi/9 \leq \omega \leq 2\pi/9$, $4\pi/9 \leq \omega \leq 5\pi/9$ ja $7\pi/9 \leq \omega \leq 8\pi/9$

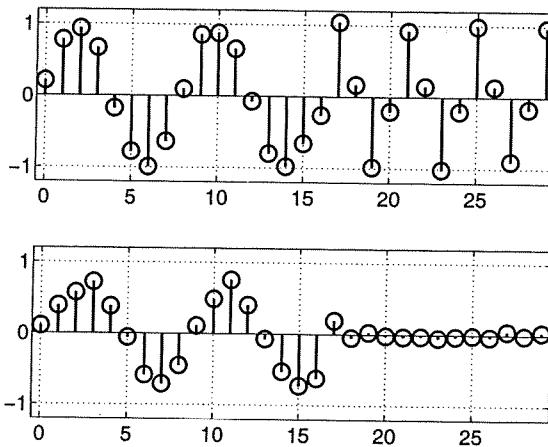


Kuva 1: (a) ja (b): Monivalintatehtävien 1.4 ja 1.7 kuvia.

2/4

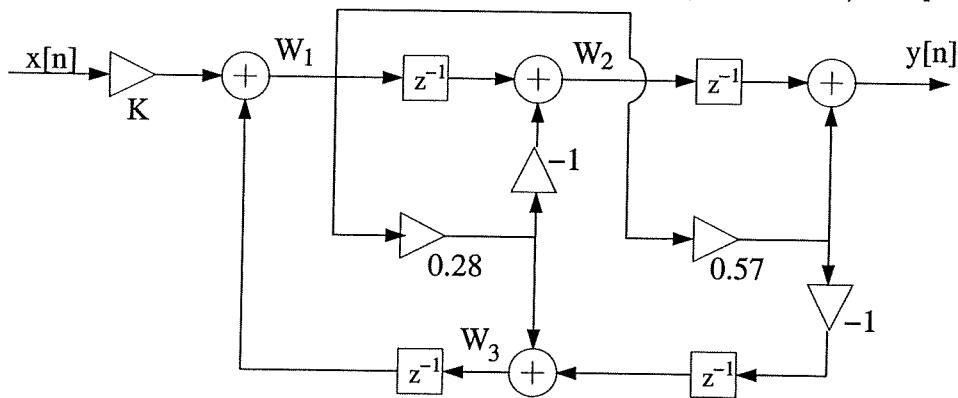
- 2) (6p) Toisen asteen kausaaliseen FIR-suotimeen (muistit tyhjinä) syötetään lukujono $x[n]$ ja sieltä saadaan ulostulo $y[n]$. Sekvenssien alut on piirretty kuvaan 2 ja ensimmäiset lukuarvot ovat:

$$\begin{aligned}x[n] &= \{0.2068, 0.7760, 0.9362, 0.6680, -0.1754, -0.7780, -0.9900, \dots\} \\y[n] &= \{0.1034, 0.3880, 0.5715, 0.7220, 0.3804, -0.0550, -0.5827, \dots\}\end{aligned}$$



Kuva 2: Tehtävä 2, syöte $x[n]$ ja vaste $y[n]$.

- a) Mikä on suotimen impulssivaste $h[n]$?
 - b) Mikä on suotimen siirtofunktio $H(z)$?
 - c) Hahmottele suotimen napanollakuvio ja amplitudivaste.
 - d) Selitä miksi ulostulo $y[n]$ näyttää menevän läheen nollaan ajan hetkillä $n \geq 18$.
- 3) (6p) Tutkitaan suodinta kuvassa 3.
- a) Määritä suotimen siirtofunktio $H(z)$.
 - b) Piirrä napanollakuvio. Laske nollien ja napojen etäisyydet origosta.
 - c) Hahmottele amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$, kun $K = 1$. Minkä tyyppinen suodin on kyseessä (huomaa tietty symmetrisyys kertoimissa): alipäästö / ylipäästö / kaistanpäästö / kaistanesto / kokopäästö ("allpass")?



Kuva 3: Tehtävän 3 suodin.

- 4) (6p) Suunnitellaan FIR-suodin ikkunamenetelmällä, kun alipäästösuoimen rajataajuus on $f_c = 4000$ Hz ja näytteenottotaajuus $f_T = 10000$ Hz. Ikkunafunktioiden määrittelyjä ja ominaisuuksia varten tutki taulukkoa 1.
- a) Piirrä ideaalisuoimen taajuusvaste $H_{ideal}(f)$.
 - b) Laske kyseisen ideaalisen suoimen impulssivasteen $h_{ideal}[n]$ arvot, kun $n = -2 \dots 2$.
 - c) Laske FIR-suotimen kertoimet $h_{FIR}[n]$ ikkunamenetelmällä käyttäen Hamming-ikkunaa $w_H[n]$, jonka pituus on 5 ($M = 2$).
 - d) Arvioi saadun FIR-suotimen käyttökelpoisuutta, kun estokaistalta vaaditaan kyseinen 54,5 desibelin minimivaimennus.

- 5) (6p) Kuvassa 4 suotimen sisääntuloon tulevien arvojen bittimäärä on B . Kertolaskujen jälkeen määrä on $2B$. Jotta ulostulo saadaan jälleen B :n bitin suuruiseksi, joudutaan arvoa $w[n]$ kvantisoimaan (lohko Q).

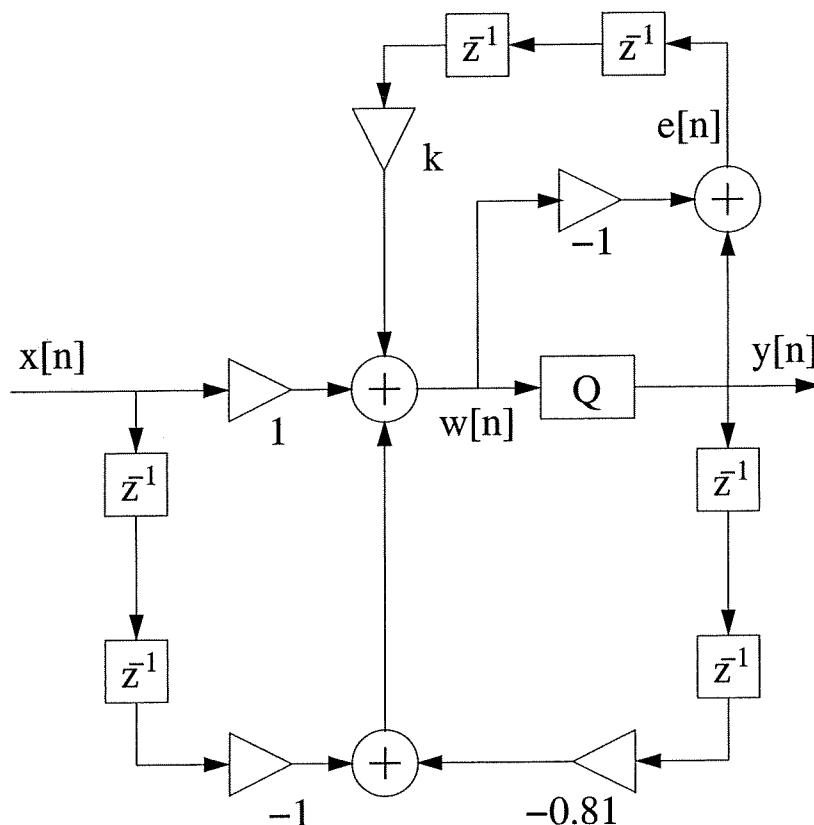
Kvantisointivirhettä voidaan kompensoida ns. virheen takaisinkytkenän ("error feedback", "error-shaping filter") avulla. Kuvassa 4 on toisen asteen suodin, jossa mukana on toisen asteen virheen takaisinkytkentä.

Kirjoita ensin differenssiyhälöt $e[n]$:lle ja $w[n]$:lle, ja kirjoita sitten taajuustasossa kvantisoitu ulostulo $Y(z)$ sisääntulon $X(z)$, sisääntuloa muokkaavan osan $H_x(z)$, kvantisointikohinan $E(z)$ ja kvantisointikohinaa muokkaavan osan $H_e(z)$ avulla muodossa

$$Y(z) = H_x(z)X(z) + H_e(z)E(z)$$

ja vastaa

- a) kuinka suodin käyttäätyy, kun käytössä äärettömän pitkä sananpituuus, ts. kvantisointia ei tapahdu ja $e[n] \equiv 0, \forall n$.
- b) kuinka kohinan kokonaisspektri $E_{tot}(z) = H_e(z)E(z)$ muokkautuu, jos kompensointia ei käytetä, ts. $k = 0$, ja jos $e[n]$ on valkoista kohinaa eli että $E(z) = 1$ kaikilla taajuuksilla.
- c) millä mahdollisimman yksinkertaisella k :n arvolla kohina saadaan siirrettyä varsinaisen suotimen estokaisalle, jossa sen merkitys on vähäisempi.



Kuva 4: Toisen asteen suodin, jossa toisen asteen virheen takaisinkytkentä.

Window	$w[n], -M \leq n \leq M$	Length of main lobe Δ_{ML}	Relative side lobe A_{sl}	Minimum stopband attenuation	Length of transition band $\Delta\omega$
Rectangular	1	$4\pi/(2M+1)$	13.3 dB	20.9 dB	$0.92\pi/M$
Hann	$0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{2M})$	$8\pi/(2M+1)$	31.5 dB	43.9 dB	$3.11\pi/M$
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{2M})$	$8\pi/(2M+1)$	42.7 dB	54.5 dB	$3.32\pi/M$
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{2M})$	$12\pi/(2M+1)$	58.1 dB	75.3 dB	$5.56\pi/M$

Taulukko 1: Ikkunafunktioiden ominaisuuksia.

T-61.3010 DSP Table of formulas, spring 2006

Disclaimer! Notations, e.g. ω or Ω , may vary from book to book, or from exam paper to other.

Even and odd functions:

$$\text{Even}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$\text{Odd}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$$

Roots of second-order polynomial:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

Complex numbers:

$$i \equiv j = \sqrt{-1} = -\frac{1}{j}$$

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x)$$

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt[r]{r e^{j\theta}} = |\sqrt[r]{r}| e^{j(\theta+2\pi k)/N}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Trigonometric functions:

$$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$$

$$\sin(\theta)/\theta \rightarrow 1, \text{ when } \theta \rightarrow 0; \text{ sinc}(\theta) \rightarrow 1, \text{ when } \theta \rightarrow 0$$

$$\cos(\theta) = 0.5e^{j\theta} + 0.5e^{-j\theta}$$

$$\sin(\theta) = 0.5je^{-j\theta} - 0.5je^{j\theta}$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & \pi/6 & \pi/4 & \pi/3 \\ \hline \sin(\theta) & 0 & 0.5 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \hline \cos(\theta) & 1 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/2 & 0.5 \\ \hline \theta & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi & -\pi/2 \\ \hline \sin(\theta) & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -1 \\ \hline \cos(\theta) & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\pi \approx 3.1416, \sqrt{3}/2 \approx 0.8660, \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$$

Geometric series:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, |a| < 1$$

Continuous-time unit step and unit impulse functions:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \mu(t), \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t) dt = x(t_0)$$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi \int \delta(t) \cdot 1 dt = 2\pi$, when $t = 0$, and = 0 elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

Correlation:

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \circledast y[-l]$$

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$$

Mean and variance of random signal:

$$m_X = E[X] = \int x p_X(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x) dx = E[X^2] - m_X^2$$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here f_s is sampling frequency (also f_T later)

Frequency

$$f, [f] = \text{Hz} = 1/\text{s}$$

Angular frequency

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi/T, [\Omega] = \text{rad/s}$$

Normalized angular frequency

$$\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s, [\omega] = \text{rad/sample}$$

Normalized frequency in Matlab

$$f_{MATLAB} = 2f/f_s, [f_{MATLAB}] = 1/\text{sample}$$

Integral transform properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity: All transforms are linear.

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Time-shifting: There is a kernel term in transform, e.g.,

$$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

Frequency-shifting: There is a kernel term in signal e.g.,

$$e^{j\omega_n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_n)})$$

Conjugate symmetry.

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

If $x[n] \in \mathbb{R}$, then

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$$

If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even.If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal: Transform variable is reversed, e.g.,

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

Differentiation: In time and frequency domain, e.g.,

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

Duality: Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

and multiplication property: vice versa

$$x_1[n] \cdot x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Parseval's relation: Energy in signal and spectral components:

$$\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Integral transforms

Definitions given in first two lines of each type. Some common pairs as well as properties are listed. See math reference book for complete tables.

Fourier-series of continuous-time periodic signals:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$$

$$e^{jM\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$$

$$\int_T x_a(\tau) x_b(t-\tau) d\tau \leftrightarrow T a_k b_k$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{l-M}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$$

Fourier-series of discrete-time periodic sequences:

$$x[n] = \sum_{k=-N_0}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad x[n] \text{ periodic with } N_0$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_0}^{N_0} x[n] e^{-jk\omega_0 n}, \quad a_k \text{ periodic with } N_0$$

$$x[n-M] \leftrightarrow a_k e^{jk\omega_0 M}$$

$$e^{jM\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{j\Omega t_0} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

$$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$$

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{dt} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{Wt} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{j\Omega t_0}$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}, \text{ where } \text{Real}(a) > 0$$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad X(e^{j\omega}) \text{ periodic } 2\pi$$

$$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_k n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$$

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] \cdot x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_l \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_l [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi \sum_l [\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi \sum_l \delta(\omega - 2\pi l)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \leq N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\Omega_1 N_1 + 0.5\pi)}{\sin(\Omega_1/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{Wn} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow \dots$$

$$\dots X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

$$\text{Discrete Fourier-transform (DFT):}$$

Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Laplace transform:

Convergence with a certain ROC (region of convergence).

Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{st} ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

z-transform:

Convergence with a certain ROC (region of convergence).

Connection to discrete-time Fourier-transform: $z = e^{j\omega}$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \quad \text{ROC all } z$$

$$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}, \quad \text{all } z, \text{ except } 0 \ (k > 0) \text{ or } \infty \ (k < 0)$$

$$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| < 1$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$na^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$(n+1)a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^3}, \quad |z| > |a|$$

$$r^n \cos(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{1 - r \cos(\omega_0 z^{-1})}{1 - 2r \cos(\omega_0 z^{-1}) + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > |r|$$

$$r^n \sin(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{r \sin(\omega_0 z^{-1})}{1 - 2r \cos(\omega_0 z^{-1}) + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > |r|$$

LTI filter analysis

Stability $\sum_k |h[n]| < \infty$; unit circle belongs to ROCCausality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROCUnit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$ Causal transfer function of order $\max\{M, N\}$:

$$H(z) = K \cdot \frac{\prod_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\prod_{n=0}^N a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=0}^M (1 - a_m z^{-1})}{\prod_{n=0}^N (1 - b_n z^{-1})}$$

Zeros: $B(z) = 0$; Poles: $A(z) = 0$; where $H(z) = B(z)/A(z)$ Frequency, magnitude/amplitude, phase response, $z \leftarrow e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$$

Group delay $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$

Important transform pairs and properties:

$$a \delta[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} \leftrightarrow a z^{-k}$$