## Tentti 19.12.2005— Dynaaminen kenttäteoria —Ratkaisuja

1. E: $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ H: $\frac{\text{A}}{\text{m}}$ D: $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$ B: $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ (= tesla) $\epsilon$: $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ $\mu$: $\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

2. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$

3. Ampèren laista $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ kun otetaan divergenssi, häviää vasen puoli (roottorin divergenssi on aina nolla) ja kun huomataan, että $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho$, ja vaihdetaan aika- ja paikkaderivointijärjestys, saadaan jatkuvuusyhtälö $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\varrho/\partial t = 0$. Se siis sanoo, että pisteessä, jossa virralla on divergenssiä, täytyy varaustiheyden pienentyä (tietysti, koska virta on varausten liikettä).

4. Kun kestomagneetti putoaa johdinsilmukan läpi, kasvaa alkuun silmukan läpäisevä magneettivuo, joten siihen indusoituu virtapulssi. Kun magneetti on silmukan keskellä, on läpimennyt vuo suurimmillaan ja alkaa sen jälkeen pienentyä. Tällöin syntyy samanlainen virtapulssi kuin hetkeä ennen, mutta vastakkaismerkkinen (ja virtafunktion amplitudi on symmetrinen tämän keskipisteen suhteen). Jos silmukkaa katsoo ylhäältä, on virta aluksi vastapäivään ja lopuksi myötäpäivään.

5. Positiiviseen ja negatiiviseen $x$-suuntaan etenevät aaltoratkaisut $f(x,t) = f_+(x - t/a)$ ja $f(x,t) = f_-(x + t/a)$, joissa $f_+(\xi)$ ja $f_-(\xi)$ ovat mitä tahansa funktioita, toteuttavat annetun yhtälön, sillä $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_+(x - t/a) = f_+''(x - t/a)$ ja $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f_+(x - t/a) = (1/a^2) f_+''(x - t/a)$, ja samoin toisen funktion kohdalla.

6. Kymmenen desibelin vaimennus tarkoittaa, että tehotiheys on pudonnut kymmenenteen osaan (siis 10%:iin alkuperäisestä). Koska tehotiheys on verrannollinen kentän neliöön, on kenttä silloin $1/\sqrt{10}$ alkuperäisestä eli noin 31,6%.

7. Kompleksinen permittiivisyys on $\epsilon' - \mathrm{j}\sigma/\omega$. Tällöin reaali- ja imaginääriosa ovat yhtä suuret taajuudella $\sigma/(2\pi\epsilon_r'\epsilon_0)$, joka tehtävän tilanteessa on noin 600 megahertsiä.

8. Kohtisuorapolarisaatio heijastuu voimakkaammin (yhdensuuntaispolarisaatiolla voi olla jopa nollaheijastus, Brewsterin kulmalla).

9. Heijastuskerroin on $-1$. Siksipä heijastunut aalto on $\mathbf{E}_h(\mathbf{r}) = -\mathbf{u} E_0 \mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz}$. Polarisaatio ei muutu (eli vektori $\mathbf{u}$ pysyy).

10.
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_x - \mathrm{j}\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}} A\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}\, z}$$

11. Sähkökenttä on $U/k$, joten magneettikenttä (tämä on TEM-johto!) on $U/(k\eta)$, missä $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon}$. Poyntingin vektori (tehotiheys) on vakio koko poikkileikkauksessa, puolet sähkö- ja magneettikentän konjugaatin tulosta ja siis amplitudiltaan $S = |U|^2/(2k^2\eta)$, joten teho on se kerrottuna poikkipinnalla: $P = klS = l|U|^2/(2k\eta)$.

12. Pienillä taajuuksilla aaltoputki ei päästä läpi. Alimman aaltomuodon ($\mathrm{TE}_{10}$) katkotaajuus on sellainen, jolla aaltoputken pitkä sivu on aallonpituuden puolikas. Siis aallonpituus on tällöin 20 cm ja taajuus $f = c/\lambda = 1{,}5\,\mathrm{GHz}$. Siksi sähkö ei kulje putkessa alueella $0 \cdots 1500\,\mathrm{MHz}$.

13. Resonanssitaajuus on verrannollinen $1/\sqrt{\epsilon\mu}$-tekijään. Eli resonanssitaajuus putoaa $1/\sqrt{10}$-osaan.

14. Kyllä toteuttaa (kunhan $r \neq 0$). Kun funktio $f$ riippuu vain pallokoordinaatiston $r$:stä, on $\nabla^2 f = (r^2 f')'/r^2$, joka on sama kuin $(rf)''/r$, eli yhtälö on $(\nabla^2 + k^2)f = (rf)''/r + k^2 f = 0$ eli $(rf)'' + k^2(rf) = 0$, jonka ratkaisut ovat $rf = A\exp(\pm \mathrm{j}kr)$ millä tahansa vakiolla $A$.

15. Hertzin dipolin säteilykuvio kaukokentässä on $\sin\theta$, missä $\theta$ on dipolin ja tarkastelusuunnan välinen kulma. Siis (lyhyt) dipoli säteilee parhaiten sivuille ja vähemmän muualle, vähiten, eli ei mitään omaan virtansa suuntaan.