

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Tentti 14.01.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Määritellään palautuva lukujono

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 2a_n}{a_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Näytä (tarvittaessa tunnettuihin lauseisiin vedoten), että

- $\{a_n\}$ on monotoninen lukujono
 - $\{a_n\}$ ei suppene kohti reaalilukua
 - $\{a_n\}$ ei ole rajoitettu lukujono
2. Lentokone lähtee pisteestä A : 45° läntistä pituutta, 60° pohjoista leveyttä ja lentää lyhintä tietä päiväntasaajan pisteeseen B : 90° itäistä pituutta. Olkoon $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ koneen lentosuunnan ja itäisen ilmansuunnan välinen kulma lähtöpisteessä A siten, että $\beta = \pi/2$ vastaa pohjoista. Laske $\sin \beta$.
3. Näytä (tunnettuihin lauseisiin vedoten), että funktio $f(x) = x + (x-1)^4(x-5)^8$ saa jossakin pisteessä $c \in \mathbb{R}$ arvon $f(c) = 3$.
4. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x$, $D_f = [1, \infty)$. Onko funktiolla paikallisia ääriarvokohtia vai onko se monotoninen? Mitä voidaan sanoa mahdollisesta raja-arvosta $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$? Perustele väitteesi ja hahmottele f :n kuvaaja.
5. Koko \mathbb{R} :ssä jatkuva (myös sileä) funktio f määritellään muualla kuin pisteessä $x = 0$ kaavalla

$$f(x) = \frac{e^x - \cos x + \sin x - 2x}{x^2}.$$

Laske $f(0)$ ja derivaatoista $f^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \dots$, ensimmäinen, joka poikkeaa nolasta. Onko f :llä paikallinen minimi tai maksimi pisteessä $x = 0$?