Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola, Lassas, Mikkola**
Tentti 8.1.2007

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin. Merkitse myös koulutusohjelma. Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Näytä, että Sturm–Liouvillen reuna-arvotehtävällä

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x)\ , & x \in (0,1)\ , \\ u(0) = 0\ ,\ u(1) = 0\ , \end{cases}$$

on olemassa Greenin funktio täsmälleen silloin, kun 0 ei ole tehtävän

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda\,u(x)\ , & x \in (0,1)\ , \\ u(0) = 0\ ,\ u(1) = 0\ , \end{cases}$$

ominaisarvo.

2. Olkoot $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ jatkuvia funktioita.
a. Määrittele, mitä tarkoittaa funktiojonon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pisteittäinen suppeneminen.
b. Määrittele, mitä tarkoittaa funktiojonon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasainen suppeneminen eli suppeneminen avaruudessa $C[0,1]$.
c. Tarkastele funktiota $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \frac{1+x}{1+nx}.$$

Suppeneeko jono $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai tasaisesti?

3. Ratkaise muodollisesti, eli esitä sarjamuotoinen ratkaisu tehtävälle

$$\begin{cases} u_t = \Delta u\ , & (x,y) \in (0,1) \times (0,1),\quad t > 0 \\ u_x(0,y,t) = 0, & u_x(1,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0, & u(x,1,t) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y). \end{cases}$$

4. Olkoon $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0\}$, ja olkoon $u\ :\ \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t)\ , & (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,\infty)\ , \\ u_{x_1}(\boldsymbol{x},t) = 0\ , & (\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)\ , \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x})\ ,\quad u_t(\boldsymbol{x},0) = 0\ , & \boldsymbol{x} \in \Omega\ , \end{cases}$$

ratkaisu. Tiedetään, että $f(\boldsymbol{x}) = 0$, kun $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \geq 1$, missä $\boldsymbol{x}^0 = (5,0,0)$.

a) Esitä u integraalin avulla. Vihje: laajenna aluksi tehtävä sopivasti koko $\mathbb{R}^3$:een.

b) Millä t:n arvoilla $u(\boldsymbol{x}^1, t)$ on varmuudella nolla, kun $\boldsymbol{x}^1 = (5, 0, 10)$?

5. Etsi operaattorin $K\ :\ C[0,\pi] \to C[0,\pi]$

$$Ky(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+s)\,y(s)\,ds$$

Ominaisarvot. Vihje: K:n ydin on separoituva.

6. Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ja olkoon $\boldsymbol{I}$ $n{\times}n$ yksikkömatriisi. Näytä, että matriisin

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{B}$$

ominaisarvot ovat $\{\lambda + \mu \,|\, \lambda \in \Lambda(\boldsymbol{A})\ ,\ \mu \in \Lambda(\boldsymbol{B})\}$. Voit olettaa, että $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat diagonalisoituvia.

Kaavoja paperin kääntöpuolella ⟶