

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

3. Välikoe 7.5.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö on kielletty. Tehtävissä, jotka koostuvat kahdesta kohdasta (kohdat a ja b), on tehtävä molemmat kohdat.

1. Olkoon $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$. Etsi tehtävälle

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(|\mathbf{x}|), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases}$$

sarjamuotoinen ratkaisu.

2. Olkoon K integraalioperaattori

$$(Ky)(t) = \int_0^1 k(t, s)y(s) ds,$$

missä y ja k ovat jatkuvia funktioita. Esitä yhtälöä

$$(I - \mu K)y = f$$

koskeva Fredholmian alternatiivi. Todista alternatiivi siinä tapauksessa, että ydin k on muotoa

$$k(t, s) = \sum_{j=1}^n a_j(t)b_j(s).$$

3. Ratkaistaan tehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

differenssimenetelmällä. Tässä $a(x)$ ja $f(x)$ ovat jatkuvia funktioita. Millaisen lineaarisen yhtälöryhmän saat?

4. (a) Etsi tehtävän

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^2 u, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, & \mathbf{x} \in B_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \mathbf{x} \in B_N \\ \lambda u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \mathbf{x} \in B_R \end{cases}$$

variaatiomuoto. (Tässä siis B_D , B_N ja B_R ovat pistevieraita joukkoja siten, että $\partial\Omega = B_D \cup B_N \cup B_R$.)

- (b) Olkoon $V_h = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, missä V on sopivasti valittu avaruus. Millaisesta yhtälöryhmästä edellisen kohdan tehtävän Ritz-Galerkin -approksimaatio $u_h \in V_h$ saadaan laskettua?