

Mat-1.2600 Sovellettu todennäköisyyslaskenta A

Tentti ja syksyn 2008 kurssin välikokeiden uusinnat 9.1.2009 / Mellin

Kirjoita selvästi *jokaiseen koepaperiin* alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-1.2600 SovTnA 1.vk / 2.vk / tentti 9.1.2009
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Lue *tarkasti* seuraavat ohjeet:

- (1) Jos olet *uusimassa 1. välikoetta*, vastaa kysymyksiin 1-3.
- (2) Jos olet *uusimassa 2. välikoetta*, vastaa kysymyksiin 5-8.
- (3) Jos olet *suorittamassa kurssia tentillä*, vastaa kysymyksiin 1-2 ja 5-7.
- (4) *Etukäteen pyydetyllä erikoisluvalla* saat suorittaa **1. välikokeen kokonaan**. Vastaa tällöin kysymyksiin 1-4.
- (5) *Etukäteen pyydetyllä erikoisluvalla* saat suorittaa **koko 2. välikokeen kokonaan**. Vastaa tällöin kysymyksiin 5-9.

Merkitse tenttipaperiisi selvästi mitä vaihtoehtoa olet suorittamassa!

Sallitut apuvälineet: *Funktiolaskin ja Mellinin kaava- ja taulukkokokoelma.*

Vastaa *lyhyesti ja ytimekkäästi*, mutta *perustele ratkaisusi*. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena *ei anna* pisteitä.

1. (a) Heität virheetöntä noppaa, kunnes saat toisen kuutosen.
 - (1) Määrää todennäköisyys, että joudut heittämään noppaa 3 kertaa tai useammin.
 - (2) Määrää tarvittavien heittojen lukumäärän odotusarvo.
- (b) Urnassa A on 2 valkoista ja 8 mustaa kuulaa ja urnassa B on 7 valkoista ja 3 mustaa kuulaa. Molemmista urnista poimitaan satunnaisesti yksi kuula ja urnasta A poimittu kuula laitetaan urnaan B ja urnasta B poimittu kuula laitetaan urnaan A. Poimitaan lopuksi kuula urnasta A satunnaisesti. Mikä on todennäköisyys, että kuula on valkoinen?
2. (a) Urnassa on 3 punaista ja 7 sinistä kuulaa. Urnasta poimitaan 4 kuulaa satunnaisesti. Mikä on todennäköisyys saada täsmälleen 3 sinistä kuulaa, kun poiminta tapahtuu ilman takaisinpanoa (palauttamatta)?
- (b) Heität virheetöntä noppaa 60000 kertaa. Määrää todennäköisyys, että kuutosten lukumäärä x toteuttaa ehdon $9900 \leq x \leq 10050$.

3. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia ja noudattavat samaa eksponenttijakaumaa $\text{Exp}(\lambda)$. Todista tarkkaan, että satunnaismuuttuja

$$Z = \min\{X, Y\}$$

noudattaa eksponenttijakaumaa. Mikä on jakauman parametri?

Eksponenttijakauman $\text{Exp}(\lambda)$ tiheysfunktio:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \lambda > 0, x \geq 0$$

4. (a) Urnassa on 6 punaista ja 4 sinistä kuulaa. Urnasta poimitaan 4 kuulaa satunnaisesti. Mikä on todennäköisyys saada täsmälleen 3 sinistä kuulaa, kun poiminta tapahtuu takaisinpanolla (palauttaen)?
- (b) Erään yrityksen puhelinkeskukseen tulevien puheluiden lukumäärä noudattaa Poissonin jakaumaa niin, että keskuksen tulee keskimäärin 50 asiakasta tunnissa. Mikä on todennäköisyys, että keskuksen tulee viikon aikana 2050 puhelua tai enemmän, kun keskus on auki 8 tuntia päivässä viitenä päivänä viikossa?
5. Eräässä lääketieteellisessä kokeessa tutkittiin verenpainelääkkeen vaikutusta. Kokeeseen valittiin satunnaisesti 5 henkilöä, joiden verenpaine mitattiin ennen lääkkeen antoa ja kahden viikon lääkekuurin jälkeen. Mittaustulokset (ns. yläpaine) on annettu alla olevassa taulukossa.

Henkilö	1	2	3	4	5
Ennen	170	160	180	165	175
Jälkeen	168	150	182	160	170

Testaa 5 %:n merkitsevyytensä käyttäen nollihypoteesia, jonka mukaan lääke ei alenna keskimääräistä (odotettavissa olevaa) verenpainetta, kun vaihtoehtoisena hypoteesinä on, että lääke alentaa verenpainetta.

6. Eräässä työpaikassa on 100 naista ja 900 miestä. Naisista tupakoi 10, kun taas miehistä tupakoi 200. Testaa 1 %:n merkitsevyytensä käyttäen hypoteesia, että sukupuoli ja tupakointi ovat riippumattomia työtekijöitä kuvaavina tekijöinä.

7. Olkoon

$$x = -0.5y + 2$$

muuttujan x (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan y suhteen ja

$$y = -x + 3$$

muuttujan y (estimoidun) regressiosuoran yhtälö muuttujan x suhteen.

(a) Määrää muuttujien x ja y aritmeettiset keskiarvot.

(b) Määrää muuttujien x ja y otoskorrelaatiokerroin.

8. Tehtaassa on kaksi samanlaista tuotetta valmistavaa konetta, A ja B. Osa molempien koneiden tekemistä tuotteista on viallisia. Molempien koneiden tekemien tuotteiden joukosta kerättiin toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset. Otoskokona koneen A tekemien tuotteiden joukossa oli 300 ja viallisia oli 15. Otoskokona koneen B tekemien tuotteiden joukossa oli 400 ja viallisia oli 36.

Testaa 5 %:n merkitsevyystasoa käyttäen nollahypoteesia, että viallisten suhteelliset osuudet kaikkien koneen A ja koneen B tekemien tuotteiden joukossa ovat yhtä suuret, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että viallisten suhteelliset osuudet eivät ole yhtä suuret.

9. Alla olevassa taulukossa on annettu pieni muuttujia x ja y koskeva havaintoaineisto. Oletetaan, että aineistosta estimoidaan pienimmän neliösumman menetelmällä lineaarinen regressiomalli, jonka selitettävänä muuttujana on y ja selittävänä muuttujana on x . Lisäksi mallissa on mukana vakio.

Määrää estimoidun mallin residuaali pisteessä $x = 0$.

x	y
-1	1
0	1
1	0
2	0
3	-1