Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat

Lassas

Tentti, 19.12.2006.

Alla tehtävissä 1 ja 5 voi käyttää kaikkia kurssilla esitettyjä tuloksia. Tehtävissä 2,3,4 voi käyttää luennoilla tai oppimateriaalissa ennen todistettavaa tehtävää esitettyjä tuloksia.

1. Osoita, että kuvaus $T : f \mapsto \frac{df}{dx}(0)$ on jatkuva $T : H^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

2. Osoita Fourier-Slice teoreema: Funktiolle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ pätee

$$[\mathcal{F}_{s\to\sigma} R_\theta f](\sigma) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(\sigma\theta).$$

   Yllä on valittu notaatio

$$R_\theta f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)\, dt.$$

3. Johda jokin Radon-käänteismuunnoksen esitys tason Radon-muunnokselle käyttämällä tehtävässä 2 esitettyä Fourier-Slice teoreemaa.

4. Olkoon $f \in C_0^\infty(0,1)$ Abelin integraaliyhtälön

$$\int_x^1 \frac{f(y)}{(y-x)^{1/2}} dy = g(x), \quad x \in [0,1]$$

   ratkaisu. Osoita, että pätee

$$f(y) = c\frac{d}{dy}\left(\int_y^1 \frac{g(x)}{(x-y)^{1/2}} dx\right), \quad y \in [0,1]$$

   jollakin vakiolla $c \in \mathbb{R}$.

5. Olkoon u aaltoyhtälön

$$\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \partial_x^2 + q(x))u(x,t) = 0, \quad x \in [0,L],\ t \geq 0\\
&u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,\\
&u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{x=L} = 0
\end{aligned}$$

   ratkaisu, missä $q \in C^\infty([0,L])$. Voidaanko operaattorin $-\partial_x^2 + q(x)$ reunaspektraalidatan ja reuna-arvon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ avulla selvittää, häviääkö aalto annetulla hetkellä T, eli päteekö $u(x,T) = 0$ kaikilla $x \in [0,L]$.