Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Havu/Tuominen

# Mat-1.3650 Elementtimenetelmä I

Tentti 7.5.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää ylimääräisiä apuvälineitä. Tehtäviä on koepaperin molemmin puolin.

1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ konveksi monikulmio. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega\text{:ssa} \\ u = 0, & \Gamma\text{:lla} \end{cases}$$

missä $\Gamma = \partial\Omega$ ja $f \in L^2(\Omega)$.

   (a) Etsi tehtävän variaatiomuoto.
   (b) Osoita, että variaatiotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu.
   (c) Esitä tehtävä sekamuodossa.

2. Osoita, että tehtävän 1 paloittain lineaariselle elementtiapproksimaatiolle $u_h$ pätee

   (a) $||u_h - u|| \leq Ch^2 \, ||f||$,
   (b) $|u_h - u|_1 \leq Ch \, ||f||$.

Tässä $|| \cdot ||$ on $L^2$-normi eli $||v||^2 = \int_\Omega |v|^2 \, dx$ ja $| \cdot |_1$ on $H^1$-(semi)normi eli $|v|_1^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$.

3. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kuvan 1 mukainen alue. Ratkaistaan tehtävää

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \Omega\text{:ssa} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \Gamma\text{:lla} \end{cases}$$

missä $\Gamma = \partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ ja $g \in L^2(\Gamma)$ paloittain lineaarisilla kolmioelementeillä.

   (a) Esitä tehtävän kerroinmatriisin $A$ rakenne.
   (b) Esitä käytännön menetelmä matriisin $A$ alkioiden laskemiseksi.

4. Yksiulotteisessa Hermiten elementissä alue $K = [a, b]$, $a < b$, polynomijoukko $\Pi = \text{span}\{1, x, x^2, x^3\}$ ja vapausasteet $\Sigma = \{v(a), v'(a), v(b), v'(b)\}$.

   (a) Osoita, että vapausasteet määräävät yksikäsitteisesti funktion $v \in \Pi$.