

AS-74.1102 Säättötekniikan matemaattiset apuneuvot / Tentti 14. 12. 2006

Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta laskujen kulku voidaan arvostelussa selvittää.

Tentissä saa olla mukana kirja: Virkkunen, Säättötekniikan matematiikkaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua. Laplace- ja z-muunnostaulukot jaetaan niille, joilla kirjaa ei ole.

10 tehtävää.

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, jossa termit α, β ja γ ovat reaalisia vakioita. Osoita, että matriisin A ominaisarvot ovat reaalisia.

2. Olkoon matriisi $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ja $B = A^T$ (a ja b ovat vakioparametreja).

Laske AB , BA , $(AB)^{-1}$ ja $(BA)^{-1}$ silloin kuin laskutoimitus on mahdollinen. Ilmaise, mitkä edellämainituista ovat mahdollisia laskutoimituksia ja millä parametrien arvoilla.

3. Laplace-muunna seuraavat funktiot

$$\text{a. } f(t) = e^{4t}(t - \cos(t)) \qquad \text{b. } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

4. Käänteismuunna

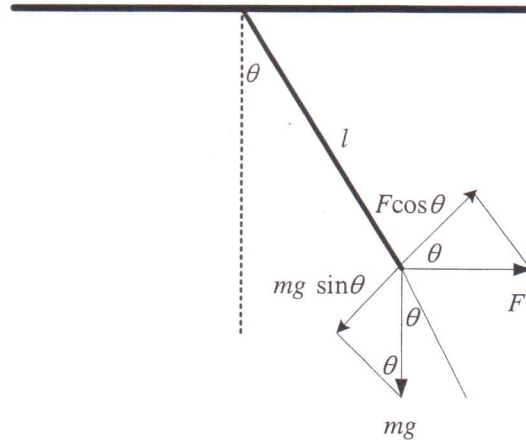
$$\text{a. } F(s) = \frac{e^{-s}}{s^3} \qquad \text{b. } F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+8}$$

5. Ratkaise laplace-muunnoksen avulla seuraava differentiaaliyhtälö

$$\dot{y}(t) + 4y(t) = \cos(t)$$

kun alkuarvo on $y(0) = 0$.

6. Kuvassa olevan heilurin



dynamiikkaa kuvaava yhtälö on

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg \sin\theta \cdot l + F \cos\theta \cdot l$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta + \frac{F}{ml} \cos\theta$$

jossa m on muuten painottoman heilurin päässä olevan pallon massa, l on heilurin pituus, g on maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys, θ on heilurin heilahduskulma ja F on massapisteeseen vaakasuunnassa kohdistettava voima.

- Muodosta systeemin (epälineaariset) tilayhtälöt käyttämällä tilamuuttujina heilahduskulmaa ja sen derivaattaa.
- Tasapainopisteessä heiluri on levossa pystysuunnassa. Linearisoi systeemin malli tasapainopisteen ympäristössä tapahtuville pienille muutoksille. Muodosta siirtofunktio voimaohjauksesta heilahduskulmaan.

7. Tutkitaan pulssijonoa $y(k)$,
jonka Z-muunnoksen tiedetään olevan

$$Y(z) = \frac{z+1}{z^2-1}$$

Laske aikasarjan $y(k)$ arvot, kun $k = 0, 1$ ja 2 seuraavilla menetelmillä

- Kehittämällä $Y(z)$:n lauseketta z^{-1} :n potenssien mukaan ja soveltamalla z -muunnoksen määritelmää (ns. pitkäjako)
- Laskemalla analyyttinen ratkaisu $y(k)$ ja tutkimalla sitä mainituilla k :n arvoilla.

8. Järjestelmää kuvaa tilaesitys

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\text{jossa } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

- a. Muodosta siirtofunktio.
b. Määritä järjestelmän navat ja nollat.

9. Diskreettiä systeemiä kuvaava tilaesitys on

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [c \quad d] x(k) \end{cases} \quad (a, b, c \text{ ja } d \text{ vakioita})$$

Millä vakioiden arvoilla lähtösuure on aina nolla (tulosuureesta riippumatta)?

10. Olkoon A ja B matriiseja, joiden dimensiot ovat $n \times m$ ja $m \times n$. Sievennä lauseke

$$A(I_m + BA)^{-1} - (I_n + AB)^{-1}A$$

jossa I_m ja I_n ovat $m \times m$ - ja $n \times n$ -dimensioisia yksikkömatriiseja, kun oletetaan, että käänteismatriisit ovat olemassa (huomaa, että A ja B eivät välttämättä ole neliömatriiseja, mutta sekä AB että BA ovat).

Ohje: Kerro lauseketta sopivasti termillä $(I_n + AB)^{-1}(I_n + AB) = I_n$.