

Kirjoita ensin alla mainitussa järjestyksessä koepapereihin selvästi

- Mat-2.105 Optimoinnin perusteet, tentti 18.5.2006
- sukunimi, etunimi, (puhuttelunimi alleviivattuna)
- opiskelijanumero, koulutusohjelma ja vuosikurssi
- päiväys ja allekirjoitus

1. Tee lyhyesti selko seuraavista optimointiin liittyvistä käsitteistä (1p / kohta)

- a) Pareto-optimaalinen portfolio
- b) ”Kyllä-ei”-rajoitus
- c) Lineaarinen ohjelmointi
- d) Vektorin x normi $\|x\|$
- e) Positiivisesti semidefiniitti matriisi Q
- f) Funktion f arvoon c liittyvä käyrä

$f(x_k)$
 $\lambda = a_1 - \alpha(b_k - a_k)$
 $b_k - (\alpha - 1)b_k - a_k$
 $1 - \alpha$

2. a) Kuvaile jokin 1-ulotteinen optimointialgoritmi. (3p)

b) Vertaa lyhyesti toisiinsa sakkofunktio- ja estefunktio menetelmää. Erityisesti, miten ne eroavat toisistaan? (3p)

3. Etsi optimointitehtävän

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{se.} \quad & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

Sakkofunktio
 Slack-muuttuja
 Ylipääntymismuuttuja
 $\lambda (4 - 4) = 0$

ratkaisu geometrisesti. Piirrä kuvaan rajoitusehdot, käypä alue ja kohdefunktion käyrät. Esitä välttämättömät Karush-Kuhn-Tuckerin ehdot ja tutki toteuttaako löytämäsi piste ne. (6p)

4. a) Tarkastellaan lineaarista optimointitehtävää:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{st.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - x + y^2 - y$$

Kirjoita tehtävää vastaava duaalitehtävä. (3p)

b) Etsi seuraavan funktion stationaariset pisteet ja tutki niiden laatu (minimi, maksimi, satulapiste) (3p)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\begin{aligned} -6 - 8\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ -6 - 0 - 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Käännä!

5. Tarkastellaan optimointitehtävää

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{st.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} z \rightarrow & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

- a) Kirjoita ongelma standardimuotoon ja ratkaise tehtävä simplex-algoritmillä käyttäen aloituspisteenä $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Perustele kukin työvaihe. (4p)
- b) Esitä alkuperäisen tehtävän käypä alue graafisesti ja piirrä samaan kuvaan simplex-algoritmin eteneminen. (2p)

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \rightarrow & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} +5+10-4 & 0 & +25 \\ -10 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \rightarrow & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 5 & 10 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 5 & 10 & -4 & -5 & 25 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{cccc} 5 & 10 & -4 & -5 & 25 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$