

# Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

## 1. välikoe 13.10.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä. Koeaika on 3h.

- a) Määritä kompleksilukujen  $z = 2 + 2i$  ja  $w = -3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$  polaariesitykset (siis muoto  $re^{i\theta}$  jossa  $r > 0$ ) ja laske niiden avulla  $\bar{z}\bar{w}$  ja  $\bar{z}/\bar{w}$ .  
b) Mitä käyriä esittävät kompleksitason joukot

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) = -1\}?$$

Mikä on näiden joukkojen leikkaus  $A \cap B$ ?

**Vihje:** Kirjoita  $z = x + iy$  jossa  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- a) Ratkaise  $x_1$  yhtälösystemistä

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cramerin säännön avulla.

- b) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi Gaussin algoritmin avulla.

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Voidaanko parametrit  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  valita siten, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Mikä on yhtälöryhmän kerroinmatriisin rangi (englanniksi "rank")?

4. Määritellään matriisi  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$  parametrin arvoilla  $\alpha \geq 0$ .

a) Laske matriisin  $A$  ominaisarvot ja -vektorit kun  $\alpha \geq 0$ .

b) Diagonalisoi matriisi  $A$  kun  $\alpha > 0$ ; toisin sanoen, etsi kääntyvä  $2 \times 2$ -matriisi  $P$  ja  $2 \times 2$ -diagonaalimatriisi  $D$  jotka toteuttavat  $A = PDP^{-1}$ . Laske diagonalisoinnin avulla potenssi  $A^n$  positiivisille kokonaisluvuille  $n$ . Mitä tapahtuu matriiseille  $A^n$  ja  $P$  kun parametri  $\alpha$  lähestyy nollaa?