

## Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 12.01.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Laske tarkka arvo integraalille

$$\int_0^3 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} dx.$$

2. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\text{a) } y' = \frac{y}{x-y} \quad \text{b) } x^2 y'' - 4xy' - 6y = \frac{1}{x}$$

3. Neliömatriisi  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  on kokoa  $5 \times 5$  ja

$$a_{ij} = \begin{cases} b, & \text{kun } i = j \\ 2, & \text{kun } i = j + 1 \text{ (} i = 2 \dots 5 \text{)} \\ 3, & \text{kun } i = 1 \text{ ja } j = 2 \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä  $b \in \mathbb{R}$ . Määritä  $\mathbf{A}$ :n spektri (=ominaisarvot). Millä  $b$ :n arvoilla  $\mathbf{A}$  on säännöllinen matriisi?

4. Janan  $AB$  päätepiste  $A$  on  $xy$ -tason piste  $(x_1, x_2, 0)$  ja päätepiste  $B$  on  $yz$ -tason piste  $(0, x_3, x_4)$ .

a) Laske  $\nabla f(6, 3, -3, 3)$ , missä  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  on janan  $AB$  pituus.

b) Olkoon  $A = (6, 3, 0)$  ja  $B = (0, -3, 3)$ . Siirretään  $A$  pisteeseen  $A'$ , joka on  $A$ :sta etäisyydellä 0.01 suuntaan  $\frac{1}{5}(-3\vec{i} + 4\vec{j})$  ja  $B$  pisteeseen  $B'$ , joka on  $B$ :stä etäisyydellä 0.02 suuntaan  $\frac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k})$ . Approksimoi janojen  $A'B'$  ja  $AB$  pituuksien erotus differentiaalin avulla.

5. Olkoon  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y, z \geq 0\}$ . Laske pallokoordinaattien avulla

$$\int_A x^4 y z \, dx dy dz.$$