

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Mitkä seuraavista joukoista ovat vektoriavaruuksia?

- Niiden reaalisten 2×2 matriisien joukko, joilla ei ole käänteismatriisia.
- Välillä $[-1, 1]$ määriteltyjen reaalilukuarvoisten jatkuvien ei-vähenevien funktioiden joukko.
- Astetta 3 olevien yhden reaalimuuttujan polynomien joukko.

Perustele vastauksesi tarkasti.

2. Olkoot V enintään astetta 2 olevien reaalimuuttujan polynomien muodostama vektoriavaruus ja $A : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ ehdon

$$A(p)(x) = \left(\int_0^1 p(x) dx, p(0) \right)$$

määräämä kuvaus, kun $p \in V$ ja $x \in \mathbb{R}$.

- Osoita, että A on lineaarinen kuvaus.
 - Onko A injektio tai surjektio?
 - Valitse avaruuksille V ja \mathbb{R}^2 jotkin kannat ja määrää kuvauksen A esitysmatriisi niiden suhteen.
3. Tarkastellaan välillä $[0, 1]$ määriteltyjen jatkuvien reaalilukuarvoisten funktioiden muodostamaa vektoriavaruutta $C[0, 1]$ varustettuna sisätulolla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

- Muodosta ortonormaali jono $\{u_0, u_1\} \subset C[0, 1]$ siten, että pätee

$$sp\{u_0\} = sp\{p_0\}, \quad sp\{u_0, u_1\} = sp\{p_0, p_1\}$$

kun $\{p_0, p_1\}$ ovat polynomeja $p_0(x) = 1$ ja $p_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

- Muodosta polynomien $h : h(x) = 4 + 3x - 2x^2$, $x \in [0, 1]$ kohtisuora projektio aliavaruuteen $sp\{p_0, p_1\}$.
- Määrääkö ehto

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x) dx$$

sisätulon avaruuteen $C[0, 1]$? Miksi?

KÄÄNNÄ!

4. Tarkastellaan lineaarikuvausta $A : V \rightarrow V$, missä V on enintään astetta 2 olevien yhden reaalimuuttujan polynomien muodostama vektoriavaruus ja $A(f) = -f - f'$ (f' on tavallinen yhden muuttujan derivointi).
- (a) Muodosta kuvauksen A matriisiesitys avaruuden V tavallisen kannan $\{p_0, p_1, p_2\}$, $p_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$ suhteen.
 - (b) Määrittää kuvauksen A ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisavaruudet.
 - (c) Onko kuvauksen A matriisiesitys diagonalisoituva? Miksi?