

Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

3. välikoe 6.5.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Onko vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}$$

konservatiivinen? Millaisia ovat sen tasa-arvopinnat?

2. Etsi astroidin

$$\mathbf{r}(t) = \cos^3(t)\mathbf{i} + \sin^3(t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

rajaaman alueen pinta-ala esimerkiksi Greenin lauseen avulla. Tehtäväpaperin alareunan trigonometrisista kaavoista saattaa olla apua sievennyksessä.

3. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + z)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

vuono ulos yksikkökuutiosta $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]\}$

- a) Gaussin lauseen avulla (2 pistettä)
b) Suoraan vuointegraalin määritelmästä (4 pistettä).

4. Tarkastellaan pallokoordinaatteja

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

missä $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

- a) Laske koordinaattikäyrien tangenttivektorit $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ sekä skaalauskerroimet h_ρ , h_θ ja h_φ . (3 pistettä)
b) Etsi funktion $f(\rho, \theta, \varphi) = 2\rho + \theta\varphi$ gradientti pallokoordinaateissa. (2 pistettä)
c) Mitä tiedetään vektorikentän $\mathbf{F}(\rho, \theta, \varphi) = \nabla f(\rho, \theta, \varphi)$ pyörteisyydestä? (1 piste)

Trigonometrisia kaavoja:

$$\begin{aligned} \sin^2(t) + \cos^2(t) &= 1 \\ \sin(2t) &= 2 \sin(t) \cos(t) \\ \cos(2t) &= 2 \cos^2(t) - 1 \\ \sin^2(t) &= \frac{1 - \cos(2t)}{2} \\ \cos^2(t) &= \frac{1 + \cos(2t)}{2} \end{aligned}$$