Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Lassas / Lukkari

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

Tentti ja ylimääräiset välikokeet 16.5.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö on kielletty. Joitain kaavoja on annettu paperin kääntöpuolella.

Tentti: Tee tehtävät 1,2,5,6,9,10.
1. välikoe : Tee tehtävät 1,2,3,4.
2. välikoe : Tee tehtävät 5,6,7,8.
3. välikoe : Tee tehtävät 9,10,11,12.

1. **Tentti, 1. Välikoe.** Etsi kaikki tehtävän

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) + \lambda u(x) = 0\,, & x \in (0,\pi) \\ u'(0) = 0\,,\ u'(\pi) = 0\,, & \end{cases}$$

ominaisarvot λ ja niitä vastaavat ominaisfunktiot.

2. **Tentti, 1. Välikoe.** Etsi alkuarvotehtävän

$$xu_x + u_y = -u,$$

$u(x^3, 0) = \cos(x)$, ratkaisu alueessa $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. **1. Välikoe.** Etsi Greenin funktio tehtävälle

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in [-1,1], \\ u(-1) = 0\,,\ u'(1) = 0. & \end{cases}$$

4. **1. Välikoe.**
(a) Formuloi Banachin kiintopistelause.
(b) Olkoon $T : C([-1,1],\mathbb{R}) \to C([-1,1],\mathbb{R})$ kuvaus

$$Tf(x) = x + \int_{-1}^{x} f(t)dt, \quad x \in [-1,1].$$

Onko f kontraktio avaruudessa $C([-1,1],\mathbb{R})$?

5. **Tentti, 2. Välikoe.** Ratkaise muodollisesti, eli esitä sarjamuotoinen ratkaisu alkuarvo-ongelmalle

$$\begin{cases} u_t = \Delta u\,, & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi),\quad t > 0, \\ u(0,y,t) = 0, & u(\pi,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = 0, & u(x,\pi,t) = 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y). & \end{cases}$$

6. **Tentti, 2. Välikoe.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, normaali alue ja u tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega,\ t > 0, \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}),\ u_t(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases}$$

ratkaisu.
(a) Näytä, että ratkaisun energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2\, dx$$

ei kasva.
(b) Näytä, että ratkaisu on yksikäsitteinen.

7. **2. Välikoe.** Oleta, että $q(x) > 0$ ja että

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) - \lambda u = 0\,, & x \in [0,1], \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. & \end{cases}$$

Osoita, että $u = 0$ tai $\lambda \geq 0$.

8. **2. Välikoe.** Laske funktion $f(x) = e^{2ix} x^4 \exp(-x^2/2)$, $x \in \mathbb{R}$, Fourier muunnos. Tässä käytämme merkintää $\exp(t) = e^t$.

9. **Tentti, 3. Välikoe.** Johda Taylorin lauseen avulla kaava

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)) + O(h^2)$$

riittävän sileille funktioille u. Miten tämän kaavan avulla ratkaistaisiin numeerisesti tehtävä

$$\begin{cases} -u''(x) + 4u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = 1, u(1) = 3? & \end{cases}$$

10. **Tentti, 3. Välikoe.** Asetetaan

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\,|\nabla u(\mathbf{x})|^2 + 2u(\mathbf{x})^2 - f(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\,dx.$$

Etsi tehtävän

$$\min I(u) \text{ ehdolla } u(\mathbf{x}) = 0 \text{ kun } \mathbf{x} \in B_D \subset \partial\Omega$$

variaatiomuoto.

11. **3. Välikoe.** Olkoon Ω sylinteri $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1, 0 < z < 1\}$. Ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} u_t = \alpha\Delta u, & (x,y,z) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & \text{kun } z = 0 \text{ tai } z = 1, \\ u(x,y,z,t) = 0, & \text{kun } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y,z,0) = f(\sqrt{x^2+y^2}). \end{cases}$$

12. **3. Välikoe.** Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja u tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, \\ u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), u_t(\mathbf{x},0) = 0 \end{cases}$$

ratkaisu. Tiedetään, että $f(\mathbf{x})$ eroaa nollasta vain, kun $|\mathbf{x}| \leq 1$. Missä pisteissä $(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $u(\mathbf{x},t)$ voi poiketa nollasta, kun (a) $n = 1$, (b) $n = 2$?

Kaavoja:

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\nu\,d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v\cdot\nabla u + v\,\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega} (v\,\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial\nu}v\nu)\,d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu}, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x} f(x)\,dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega\,.$$

Besselin yhtälö:

$$\rho^2 J_m''(\rho) + \rho J_m'(\rho) + (\rho^2 - m^2)J_m(\rho) = 0.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\,u_r + \tfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\,u_r + \tfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\,u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\,u_\phi\,.$$

d'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\mathbf{v}|\leq 1} \frac{(\frac{\partial}{\partial t}t\,(t\,f(\mathbf{x}+ct\,\mathbf{v}))) + t\,g(\mathbf{x}+ct\,\mathbf{v})}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}}\,d\mathbf{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\mathbf{v}|=1} \left[\frac{\partial}{\partial t}t\,(t\,f(\mathbf{x}+ct\,\mathbf{v})) + t\,g(\mathbf{x}+ct\,\mathbf{v})\right] d\sigma_{\mathbf{v}}\,.$$