

## Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Tentti 14.01.2008

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Määritellään palautuva lukujono

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 2a_n}{a_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Näytä (tarvittaessa tunnettuihin lauseisiin vedoten), että

- $\{a_n\}$  on monotoninen lukujono
  - $\{a_n\}$  ei suppene kohti reaalilukua
  - $\{a_n\}$  ei ole rajoitettu lukujono
2. Lentokone lähtee pisteestä  $A$  :  $45^\circ$  läntistä pituutta,  $60^\circ$  pohjoista leveyttä ja lentää lyhintä tietä päiväntasaajan pisteeseen  $B$  :  $90^\circ$  itäistä pituutta. Olkoon  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$  koneen lentosuunnan ja itäisen ilmansuunnan välinen kulma lähtöpisteessä  $A$  siten, että  $\beta = \pi/2$  vastaa pohjoista. Laske  $\sin \beta$ .
3. Näytä (tunnettuihin lauseisiin vedoten), että funktio  $f(x) = x + (x-1)^4(x-5)^8$  saa jossakin pisteessä  $c \in \mathbb{R}$  arvon  $f(c) = 3$ .
4. Tarkastellaan funktiota  $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x$ ,  $D_f = [1, \infty)$ . Onko funktiolla paikallisia ääriarvokohtia vai onko se monotoninen? Mitä voidaan sanoa mahdollisesta raja-arvosta  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ? Perustele väitteesi ja hahmottele  $f$ :n kuvaaja.
5. Koko  $\mathbb{R}$ :ssä jatkuva (myös sileä) funktio  $f$  määritellään muualla kuin pisteessä  $x = 0$  kaavalla

$$f(x) = \frac{e^x - \cos x + \sin x - 2x}{x^2}.$$

Laske  $f(0)$  ja derivaatoista  $f^{(k)}(0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ensimmäinen, joka poikkeaa nolasta. Onko  $f$ :llä paikallinen minimi tai maksimi pisteessä  $x = 0$ ?

## Mat-1.1010 Grundkurs L1

Tentamen 14.01.2008

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Vi definierar den rekursiva talföljden

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 2a_n}{a_n^2 + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Visa (genom att vid behov hänvisa till kända satser) att

- $\{a_n\}$  är en monoton talföljd
  - $\{a_n\}$  konvergerar inte till något reellt tal
  - $\{a_n\}$  är inte en begränsad talföljd
2. Ett flygplan startar från punkten  $A$  :  $45^\circ$  västlig longitud,  $60^\circ$  nordlig latitud och flyger kortaste vägen till punkten  $B$  :  $90^\circ$  östlig longitud på ekvatorn. Låt  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$  vara vinkeln mellan planets flygriktning och riktningen österut i startpunkten  $A$ , så  $\beta = \pi/2$  svarar mot riktningen norrut. Beräkna  $\sin \beta$ .
3. Visa (genom att hänvisa till kända satser) att funktionen  $f(x) = x + (x - 1)^4(x - 5)^8$  får värdet  $f(c) = 3$  i någon punkt  $c \in \mathbb{R}$ .
4. Vi studerar funktionen  $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x$ ,  $D_f = [1, \infty)$ . Har funktionen lokala extremvärdepunkter eller är den monoton? Vad kan man säga om det eventuella gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ? Motivera påståendena och skissa  $f$ 's graf.
5. En i hela  $\mathbb{R}$  kontinuerlig (och även slät) funktion  $f$  definieras bortom punkten  $x = 0$  via formeln

$$f(x) = \frac{e^x - \cos x + \sin x - 2x}{x^2}.$$

Beräkna  $f(0)$  och den första av derivatorna  $f^{(k)}(0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , som är skild från noll. Har  $f$  ett lokalt maximum eller minimum i punkten  $x = 0$ ?