Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Lassas / Lukkari

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

2. Välikoe 1.4.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö on kielletty. Tehtävissä, jotka koostuvat kahdesta kohdasta (kohdat a ja b), on tehtävä molemmat kohdat.

1. (a) Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti derivoituva funktio, jolle pätee $f(\pi) = f(-\pi)$. Johda kaava, jolla funktion f Fourier-kertoimien

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

avulla voidaan laskea funktion derivaatan f' Fourier kertoimet.

   (b) Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mielivaltaisen monta kertaa derivoituva funktio, jolle pätee $f(\pi) = f(-\pi)$ ja $f'(\pi) = f'(-\pi)$. Osoita, että funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti.

2. Osoita, että kun $\lambda < 0$ niin tehtävän

$$\begin{cases} -(u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)) = \lambda u(x,y)\ , & x \in (0,1)\,,\ y \in (0,1)\ , \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on $u(x,y) = 0$.

3. Olkoon $f \in L_1(\mathbb{R})$ ja $u = u(x,t)$ rajoitettu. Osoita Fourier-muunnosta käyttämällä, että lämpöyhtälön

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ratkaisulle pätee

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, dx$$

kaikilla $t > 0$.

Vihje: Tutki, mikä on funktion Fourier muunnoksen arvo nollassa.

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, normaali alue ja u tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \nabla u), & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \\ u(\boldsymbol{x}, t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}), u_t(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega \end{cases}$$

ratkaisu, missä $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen ja positiividefiniitti $n \times n$-matriisi.

   (a) Näytä, että ratkaisun energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + (\boldsymbol{A}\nabla u) \cdot \nabla u\, dx$$

säilyy. Vihje: miksi $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2)$?

   (b) Näytä, että ratkaisu on yksikäsitteinen.

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \nu \, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} v\nu)\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu},\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Besselin yhtälö:

$$\rho^2 J_m''(\rho) + \rho J_m'(\rho) + (\rho^2 - m^2) J_m(\rho) = 0.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r} u_r + \tfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r} u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi} u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2} u_\phi\,.$$

d'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$