

Mat-1.3460 Principles of Functional Analysis

Mid-term exam (2/2), 16.12.2006

1. Let X be a Banach space and $T \in B(X)$. Assume that $\|T^k\| \leq c$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Prove that for every $N \in \mathbf{N}$, $\sigma(T^N) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$, and

$$\|(\lambda I - T^N)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda| - 1}$$

for $\lambda \in \mathbf{C}$ with $|\lambda| > 1$.

2. For $H = \ell^2$, define the shift operators S_R and S_L by

$$\begin{aligned} S_R x &= (0, \xi_1, \xi_2, \dots), \\ S_L x &= (\xi_2, \xi_3, \dots), \end{aligned}$$

where $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^2$. Show that

- (a) $\sigma_p(S_R) = \emptyset$ and $\sigma_p(S_L) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\} =: \mathbb{D}$,
(b) $\sigma(S_R) = \sigma(S_L) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$,
(c) Find some approximate eigenvectors for S_R in order to show that $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S_R)$.
3. Let T be a linear operator in Banach space ℓ^1 defined by

$$T e_n := \alpha_n (e_n + e_{n+1} + \dots + e_{2n})$$

for all $n \in \mathbf{N}$, where $(e_n)_{n=1}^\infty$ is the orthonormal basis, i.e., $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, etc. Give the necessary and sufficient conditions for the sequence $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$, where $\alpha_n \in \mathbf{C}$, so that

- (a) $T \in B(\ell^1)$,
(b) $T \in \mathcal{K}(\ell^1)$,
(c) $T \in \mathcal{F}(\ell^1)$.

Justify your answer.

Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

Välikoe (2/2), 16.12.2006

1. Olkoon X Banach-avaruus ja $T \in B(X)$. Oletetaan, että $\|T^k\| \leq c$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Näytä, että jokaiselle $N \in \mathbf{N}$, $\sigma(T^N) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$, ja

$$\|(\lambda I - T^N)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda| - 1},$$

kun $\lambda \in \mathbf{C}$ siten, että $|\lambda| > 1$.

2. Olkoon $H = \ell^2$. Määritellään siirto-operaattorit S_R and S_L seuraavasti

$$\begin{aligned} S_R x &= (0, \xi_1, \xi_2, \dots), \\ S_L x &= (\xi_2, \xi_3, \dots), \end{aligned}$$

missä $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^2$. Näytä, että

- (a) $\sigma_p(S_R) = \emptyset$ and $\sigma_p(S_L) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\} =: \mathbb{D}$,
(b) $\sigma(S_R) = \sigma(S_L) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$,
(c) Etsi operaattorille S_R approksimatiivisia ominaisvektoreita näyttääksesi, että $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S_R)$.
3. Olkoon annettuna lineaarioperaattori T Banachin avaruudessa ℓ^1 normaalikannan $(e_n)_{n=1}^\infty$ avulla siten, että

$$Te_n := \alpha_n(e_n + e_{n+1} + \dots + e_{2n})$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tässä $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ jne.. Anna riittävät ja välttämättömät ehdot jonolle $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$, missä $\alpha_n \in \mathbf{C}$, siten, että

- (a) $T \in B(\ell^1)$,
(b) $T \in \mathcal{K}(\ell^1)$,
(c) $T \in \mathcal{F}(\ell^1)$.

Perustele vastauksesi.