Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola, Lassas, Mikkola**

Tentti 8.1.2007

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin. Merkitse myös koulutusohjelma. Laskimen käyttö ei ole sallittu. Tentti kestää neljä tuntia.

1. Näytä, että Sturm–Liouvillen reuna-arvotehtävällä

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x)\,, & x \in (0,1)\,, \\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,, \end{cases}$$

on olemassa Greenin funktio täsmälleen silloin, kun 0 ei ole tehtävän

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda\,u(x)\,, & x \in (0,1)\,, \\ u(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,, \end{cases}$$

ominaisarvo.

2. Olkoot $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ jatkuvia funktioita.

a. Määrittele, mitä tarkoittaa funktiojonon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pisteittäinen suppeneminen.

b. Määrittele, mitä tarkoittaa funktiojonon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasainen suppeneminen eli suppeneminen avaruudessa $C[0,1]$.

c. Tarkastele funktiota $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \frac{1+x}{1+nx}.$$

Suppeneeko jono $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai tasaisesti?

3. Ratkaise muodollisesti, eli esitä sarjamuotoinen ratkaisu tehtävälle

$$\begin{cases} u_t = \Delta u\,, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \quad t > 0 \\ u_x(0,y,t) = 0, \quad u_x(1,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0, \quad u(x,1,t) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y). \end{cases}$$

4. Olkoon $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0\}$, ja olkoon $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tehtävän

$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t)\,, & (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,\infty)\,, \\ u_{x_1}(\boldsymbol{x},t) = 0\,, & (\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)\,, \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x})\,, \quad u_t(\boldsymbol{x},0) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \end{cases}$$

ratkaisu. Tiedetään, että $f(\boldsymbol{x}) = 0$, kun $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \geq 1$, missä $\boldsymbol{x}^0 = (5,0,0)$.

a) Esitä u integraalin avulla. Vihje: laajenna aluksi tehtävä sopivasti koko $\mathbb{R}^3$:een.

b) Millä t:n arvoilla $u(\boldsymbol{x}^1, t)$ on varmuudella nolla, kun $\boldsymbol{x}^1 = (5,0,10)$?

5. Etsi operaattorin $K : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$

$$Ky(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+s)\,y(s)\,ds$$

Ominaisarvot. Vihje: K:n ydin on separoituva.

6. Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ja olkoon $\boldsymbol{I}$ $n{\times}n$ yksikkömatriisi. Näytä, että matriisin

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{B}$$

ominaisarvot ovat $\{\lambda + \mu \,|\, \lambda \in \Lambda(\boldsymbol{A}),\ \mu \in \Lambda(\boldsymbol{B})\}$. Voit olettaa, että $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat diagonalisoituvia.

Kaavoja paperin kääntöpuolella ⟶

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma .$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\,\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma .$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\,\tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma .$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma .$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right)\right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad b_k = \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\tfrac{k\pi x}{L}\right) dx .$$

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx .$$

Fourier-käänteismuunnos:

$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,\widehat{f}(\omega)\, d\omega .$$

Hyödyllinen kaava:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega y - \beta\omega^2}\, d\omega = \sqrt{\tfrac{\pi}{\beta}}\; e^{-y^2/4\beta}, \qquad y \in \mathbb{R},\ \beta > 0 .$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\,u_r + \tfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} .$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\,u_r + \tfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\,u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\,u_\phi .$$

d-dimensioinen lämpöydin:

$$k(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{v}|\le 1} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\right) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v} .$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\boldsymbol{v}|=1} \left[\tfrac{\partial}{\partial t}\left(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\right) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\right] d\sigma_{\boldsymbol{v}} .$$

Kelvinin muunnos: (dimensiossa d, a-säteisen pallon suhteen)

$$(Ku)(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{x}|}\right)^{d-2} u\left(\frac{a^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\,\boldsymbol{x}\right).$$