

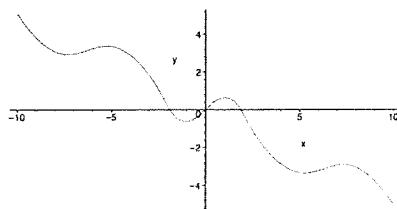
Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1010 Matematiikan peruskurssi L1

3. välikoe 19.12.2006 klo 9–12.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Huom: Ei laskimia eikä taulukoita!

1. Funktio $\tanh: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, on aidosti kasvava bijektio.
 - a) Johda käänteisfunktion lauseke $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.
 - b) Laske $D(\operatorname{artanh} x)$, kehitä tulos sarjaksi ja määritä tämän avulla artanh-funktion Taylor-sarja pisteessä $x_0 = 0$.
2. a) Funktio $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva ja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Osoita, että funktiona f on (ainakin yksi) minimi joukossa \mathbf{R} .
 - b) Funktio $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ määritellään asettamalla $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$
 Osoita, että g on derivoituva pisteessä $x = 0$, mutta epäjatkuva kaikissa muissa pisteissä $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
 Huom: Tehtävässä saa (= täytyy) käyttää kurssilla esitettyjä perustuloksia.
3. a) Osoita, että yhtälöllä $\tan x = 1/x$ on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $0 < x < \pi/2$.
 - b) Määritä ratkaisun likiarvo korvaamalla $\tan x$ sen Taylor-polynomilla $T_3(x, 0)$.
 - c) Kirjoita yhtälö kiintopisteyhtälönä sellaisessa muodossa, että iteraatio suppenee (perustelu!) ja iteroi kaksi askelta alkuarvosta $x_0 = 1$.
4. Osoita, että yhtälö $2 \sin x + \sin y = x + 2y$ määrittelee yksikäsitteisen implisiittifunktion $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Määritä funktion $y = y(x)$ ensimmäinen paikallinen ääriarvokohta x_0 alueessa $x > 0$ ja selvitä sen laatu.
 Huom: Kuviosta voi katsoa vihjeitä, mutta siihen vetoaminen ei kelpaa perusteluksi!
 Ääriarvoa $y_0 = y(x_0)$ ei tarvitse laskea.



Provet på svenska: Vänd!

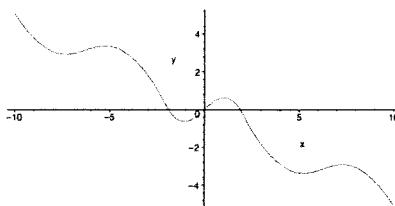
Tekniska högskolan
Mat-1.1010 Grundkurs i matematik L1

3. mellanförhöret 19.12.2006 kl. 9–12.

Fyll i all krävd information på alla svarsningar.

Obs: Inga kalkylatorer eller tabeller!

1. Funktionen $\tanh: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, är strängt växande och bijektiv.
 - a) Härled formeln $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ för den inversa funktionen.
 - b) Beräkna $D(\operatorname{artanh} x)$, utveckla den som en serie, och bestäm med hjälp av det här resultatet Taylor-serien av funktionen artanh i punkten $x_0 = 0$.
2. a) Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är kontinuerlig och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Visa att funktionen f har (minst) ett minimum i mängden \mathbf{R} .
 - b) Funktionen $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definieras genom att sätta $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{då } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{då } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$
 Visa att g är deriverbar i punkten $x = 0$, men diskontinuerlig i alla andra punkten $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
 Obs: Man får (= måste) använda några basresultat presenterade i kursen.
3. a) Visa att ekvationen $\tan x = 1/x$ har en unik lösning i intervallet $0 < x < \pi/2$.
 - b) Bestäm lösningens närmevärde genom att substituera Taylor-polynomen $T_3(x, 0)$ i stället av $\tan x$.
 - c) Skriva ekvationen på formen av en fixpunktekvation, så att iterationen konvergerar (motivering!) och iterera två steg från begynnelsevärdet $x_0 = 1$.
4. Visa att ekvationen $2 \sin x + \sin y = x + 2y$ definierar en entydig implicitfunktion $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Bestäm funktionens $y = y(x)$ första lokala extrempunkt x_0 i området $x > 0$ och undersök dess typ.
 Obs: Man får några tips från bilden, men de gäller inte som en bevis! Extremvärdet $y_0 = y(x_0)$ behöver inte beräknas.



Koe suomeksi: Käännä!