Tfy-0.2124 Kvanttimekaniikka Tentti (5 op) 13.5.2009

1. Vastaa mahdollisimman lyhyesti mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
a) Mitä tarkoitetaan degeneraatiolla?
b) Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ kommutoivat keskenään, niin operaattoreilla $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ on joukko yhteisiä ei-triviaaleja ominaisfunktioita.
c) Yksiulotteisen vapaan hiukkasen tapauksessa Hamiltonin operaattorin $\widehat{H}$ ominaisarvo on kaksinkertaisesti degeneroitunut. Mitä mahdollisia ominaisfunktioita $\widehat{H}$:n ominaisarvoyhtälöllä on?
d) Osoita, että yksiulotteiselle vapaalle hiukkaselle on voimassa $[\hat{p}, \widehat{H}] = 0$, missä $\hat{p}$ on kulmaliikemääräoperaattori ja $\widehat{H}$ Hamiltonin operaattori.
e) Ovatko kaikki $\widehat{H}$:n mahdolliset ominaisfunktiot myös $\hat{p}$:n ominaisfunktioita?
f) Miten b-kohta voidaan yleistää koskemaan myös degeneroitua tapausta? Mitkä ovat tällöin $\hat{p}$:n ja $\widehat{H}$:n yhteiset ominaisfunktiot vapaan hiukkasen tapauksessa?

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \le x \le a$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\widehat{H}$ (eli ajasta riippumattoman Schrödingerin yhtälön) ortonormeeratut ominaisfunktiot ja -arvot ovat

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Oletetaan, että hiukkasen normeerattu tilafunktio hetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{14}}[3\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) + \varphi_3(x)].$$

a) Ratkaise hiukkasen tilafunktio $\Psi(x,t)$ ajanhetkellä t. Onko tilafunktio edelleen normeerattu? Perustelut. (3 p.)
b) Laske energian odotusarvo $\langle\widehat{H}\rangle$. Onko $\widehat{H}$:n odotusarvo liikevakio? Perustelut. (2 p.)
c) Mitä energian arvoja ja millä todennäköisyyksillä voidaan energian yksittäisestä mittauksesta saada? (1 p.)

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \quad \text{ja} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right),$$

missä $\beta = \sqrt{m\omega_0/\hbar}$.
a) Osoita, että peruskommutaattori $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ja Hamiltonin operaattori $\widehat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$.
b) Osoita, että ominaisarvot $E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$
c) Laske kolme alinta ominaistilaa φ_0, φ_1 ja φ_2 käyttäen apuna nosto- ja laskuoperaattoreita. Alin ominaistila on φ_0 ja ominaistiloja ei tarvitse normeerata.

4. Tarkastellaan systeemin kulmaliikemäärän mittaamista. Systeemi on $\hat{L}^2$:n ja $\hat{L}_z$:n yhteisessä ominaistilassa $|\ell m\rangle = |11\rangle$ ominaisarvoilla $L^2 = 2\hbar^2$ ja $L_z = \hbar$. Tämän jälkeen systeemistä mitataan L_x.
a) Mitkä ovat L_x:n mittauksen mahdolliset arvot? Perustelut.
b) Laske, mikä on todennäköisyys saada mittauksesta tulos $L_x = -\hbar$.
Ohje: $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, $\hat{L}_\pm|\ell m\rangle = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|\ell, m \pm 1\rangle$, $\langle \ell m|\ell' m'\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$.

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi (myös kirjain), koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi.