Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1020 Matematiikan peruskurssi L2
Alestalo

Tentti 8.1.2007.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Tentin kesto: 4 tuntia.

Ei laskimia eikä taulukoita!

1. Laske integraalit

$$\int_0^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx \quad \text{ja} \quad \int_1^3 \ln(2x)\, dx.$$

2. a) Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 3y' - 4y = 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
b) Oletetaan, että funktiot y_1 ja y_2 toteuttavat lineaarisen differentiaaliyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, missä funktiot p ja q ovat jatkuvia koko reaaliakselilla. Osoita, että Wronskin determinantti

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $W' = -p(x)W$ ja määritä W:n lauseke tapauksessa $p(x) = 2x$, $y_1(0) = y_2'(0) = 1$, $y_1'(0) = y_2(0) = 0$.

3. Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = [1,2,3]^T$ ja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [x,y,z]^T$. Määritellään lineaarikuvaus $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ asettamalla

$$L(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}.$$

a) Määritä lineaarikuvauksen L matriisi A, ts. etsi sellainen matriisi A, että $\mathbf{a} \times \mathbf{r} = A\mathbf{r}$ kaikille vektoreille $\mathbf{r}$.
b) Olkoon $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$. Määritä yhtälöryhmän $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$ ratkeavuusehdot. Voiko ratkaisu olla yksikäsitteinen jollekin vektorille $\mathbf{b}$?
c) Laske matriisin A ominaisarvot ja osoita, että $\mathbf{a}$ on eräs ominaisvektoreista.

4. Määritä funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x + 2y$, suurin ja pienin arvo ehdolla $x^2 + xy + y^2 = 3$.

5. Laske molemmat Gaussin lauseessa $\int_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_K \nabla\cdot\mathbf{F}\, d\mu$ esiintyvät integraalit, kun $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja kappale K on puolipallo, jota rajoittavat pinnat $z = 0$ ja $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.