

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Olkoon $C^2([a, b])$ välillä $[a, b]$ määriteltyjen reaaliarvoisten, kahdesti jatkuvasti derivoituvien funktioiden muodostama vektoriavaruus. Onko joukko

$$S = \{f \in C^2([a, b]) \mid f''(x) + f(x) = 0, \text{ kaikilla } x \in [a, b]\}$$

$C^2([a, b])$:n vektorialiavaruus? Perustele.

2. Olkoon P_2 enintään astetta 2 olevien yhden reaalimuuttujan reaalityyppisten polynomien muodostama vektoriavaruus.

(a) Osoita, että ehdon

$$(Dp)(x) = 2p(x) + p'(x) - 5p''(x)$$

määrittämä kuvaus $D : P_2 \rightarrow P_2$, $p \in P_2$, $x \in \mathbb{R}$ on lineaarinen.

(b) Muodosta kuvauksen D matriisi P_2 :n tavallisen kannan $\{p_0, p_1, p_2\}$ suhteen, missä $p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Onko D kääntyvä? Miksi?

3. Määrittää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) sarakeavaruudelle $\text{Col}(A)$ kanta,
(b) $\text{Rank}(A)$,
(c) nolla-avaruuden $\text{Nul}(A)$ dimensio,
(d) nolla-avaruudelle $\text{Nul}(A)$ kanta.

4. Olkoon $C^0([-1, 1])$ välillä $[-1, 1]$ määriteltyjen reaaliarvoisten, jatkuvien funktioiden muodostama vektoriavaruus varustettuna sisätulolla

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- (a) Mitkä polynomeista $p_n : p_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ovat kohtisuorassa vakiofunktion $p_0 : p_0(x) \equiv 1$ vastaan?
(b) Määrittää polynomien p_n , $n \in \mathbb{N}$ pituus.