

Mat-1.1030 Matematiikan peruskurssi L3

3. välikoe 19.12.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFF, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimet ovat kiellettyjä.

1. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vihje: ks alla olevat kaavat.

2. Etsi suurin mahdollinen α ja pienin mahdollinen μ siten, että kaikilla $t > 0$ pätee

$$e^{\alpha t} \leq \|e^{t\mathbf{A}}\| \leq e^{\mu t},$$

kun $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Näytä, että ohjaussysteemi

$$\mathbf{x}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

on täydellisesti ohjattava ja etsi sille säätölaki $u_k = \mathbf{v}^T \mathbf{x}^k$ siten, että takaisinkytketyn systeemin ominaisarvot ovat $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

4. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = x_2^2 - 3x_1 + 2 \\ x_2' = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuisia lineaariset systeemit ovat? Voidaanko näiden perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteiden ympäristössä?

Hyödyllisiä kaavoja:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$