

Mat-1.1030 Matematiikan peruskurssi L3

3. välikoe 16.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimet ovat kiellettyjä.

1. Onko systeemi $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ stabiili, asymptoottisesti stabiili, vai epästabiili, kun

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}?$$

2. Ratkaise alkuarvotettava

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vihje: kts. alla olevat kaavat.

3. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 + x_2 \\ x_2' &= -1 + x_2^2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi niissä. Piirrä kuva niistä alueista, joissa x_1' ja x_2' ovat positiivisia tai negatiivisia. Hahmottele ratkaisukäyriä.

4. Tarkastellaan 2-askelmenetelmää, joka rakennetaan seuraavasti: Olkoon p toisen asteen polynomi, joka toteuttaa

$$p(-h) = x_j, \quad p(0) = x_{j+1}, \quad p'(0) = f(x_{j+1}),$$

ja asetetaan $x_{j+2} = p(h)$. Kirjoita tämä menetelmä muodossa

$$a_2 x_{j+2} + a_1 x_{j+1} + a_0 x_j = h b f(x_{j+1}).$$

Onko näin saatu menetelmä stabiili?

Hyödyllisiä kaavoja:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$