T-61.3040 Signaalien tilastollinen mallinnus

Tentti 15.12.2008

Tentissä saa olla mukana laskin (ei ohjelmoitava tai muisti tyhjä) ja matematiikan perustaulukot (ei taulukoita joissa on kurssin aiheisiin suoraan liittyvää materiaalia). Tentin tulokset ilmoitetaan aikanaan Noppa-järjestelmän kautta, ei siis enää uutisryhmässä opinnot.tik.informaatiotekniikka.

1. (max 6p)

Selitä *lyhyesti* seuraavat asiat menemättä tarpeettomasti yksityiskohtiin:
i) Ergodisuus (2p)
ii) Pisarenkon menetelmä (2p)
iii) Woldin hajotelma (2p)

2. (max 6p)

Olet havainnut reaaliarvoisen nollakeskiarvoisen WSS-prosessin $x(n)$ ja tiedät seuraavat autokorrelaation arvot: $r_x(0) = 1$, $r_x(1) = 2/3$, $r_x(2) = 0$, $r_x(3) = 1/3$, $r_x(4) = 0$.

i) Muodosta optimaalinen kaksikertoiminen lineaarinen ennustin, missä ennustat arvoa $x(n)$ havaintojen $x(n-1)$ ja $x(n-2)$ avulla. (2p)

ii) Mikä on ennustimesi keskimääräinen neliöllinen ennustusvirhe? Kuinka paljon ennustusvirhe on prosessin varianssia $\text{Var}(x(n))$ pienempi? (2p)

iii) Voitko parantaa ennustustarkkuutta sellaisen kaksikertoimisen lineaarisen ennustimen avulla, missä ennustat arvoa $x(n)$ havaintojen $x(n-2)$,$x(n-3)$ tai havaintojen $x(n-3)$,$x(n-4)$ avulla? (2p)

3. (max 6p)

Vastaa seuraaviin väitteisiin joko "tosi" tai "epätosi" tai jätä vastaamatta. Oikea vastaus antaa yhden pisteen, väärä -1 pistettä ja vastaamatta jättäminen nolla pistettä. Tästä tehtävästä saamasi kokonaispistemäärä ei kuitenkaan voi laskea negatiiviseksi; kokonaispistemäärä on vähintään nolla. Vastauksia ei tarvitse perustella.

a) Jos $x(n) = d(n) + v(n)$, $x(n)$ ja haluttu signaali $d(n)$ ovat yhdessä WSS, ja $d(n)$ ja valkoinen kohina $v(n)$ eivät korreloi, niin IIR Wiener-suotimen taajuusvasteelle voi näillä tiedoilla antaa ylärajan.

b) MA(q)-prosessilla on äärettömän monta nollasta poikkeavaa autokorrelaatiota $r_x(k)$.

c) Vasteen autokorrelaatio $r_y(n)$ on syötteen autokorrelaation $r_x(n)$ ja impulssivasteen $h(n)$ konvoluutio.

d) Jos prosessi $x(n)$ ja haluttu prosessi $d(n)$ ovat yhdessä WSS ja LMS-algoritmin askelpituus toteuttaa $0 < \mu < 2/\lambda_{max}$ (missä λ_{max} on matriisin $\mathbf{R}_x$ suurin ominaisarvo), niin LMS-algoritmin keskimääräinen neliövirhe konvergoi vastaavan Wiener-suotimen keskimääräiseen neliövirheeseen.

e) Jos estimoidaan $M \times M$ autokorrelaatiomatriisia N:stä havainnosta, kovarianssimenetelmä laskee jokaisen estimaattinsa vähintään yhtä monesta havainnosta kuin autokorrelaatiomenetelmä.

f) ARMA(2,1)-prosessi $x(n) = x(n-1) - (1/4)x(n-2) + v(n) + (1/2)v(n-1)$, missä $v(n)$ on normaalijakautunutta valkoista kohinaa varianssilla 1, on väljässä mielessä stationäärinen.

4. (max 6p)

Olet mitannut seuraavat kolme havaintoa reaaliarvoisesta nollakeskiarvoisesta WSS-prosessista $x(n)$: $x(0) = 2$, $x(1) = 1$, $x(2) = 1$. Tiedät, että prosessilla pitäisi olla paljon tehoa yhdellä taajuudella, joka on joko $\pi/3$ tai $\pi/2$.

i) Estimoi prosessille 3×3 autokorrelaatiomatriisi niin, että tulos on positiivisemidefiniitti. (1.5p)

ii) Estimoi kahdelle yllämainitulle taajuudelle tehospektrin arvo käyttäen periodogrammia. Kumpi taajuus on estimaattien perusteella todennäköisemmin oikea? (1.5p)

iii) Estimoi kahdelle yllämainitulle taajuudelle tehospektrin arvo tai laske niille pseudospektrin arvo, käyttäen valitsemaasi parametristä menetelmää. Kumpi taajuus on tulosten perusteella todennäköisemmin oikea? Voit käyttää pienempää 2×2 autokorrelaatiomatriisia jos valitsemassasi menetelmässäsi laskenta on muuten liian hankalaa. (3p)

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja:
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

Ole hyvä ja anna kurssipalautetta! http://www.cs.hut.fi/Opinnot/Palaute/kurssipalaute.html
Var så god och ge kursrespons! http://www.cs.hut.fi/Opinnot/Palaute/kurssipalaute-sve.html