

## Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 3 06.05.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Tasokäyrän  $S$  yhtälö peruskoordinaatistossa  $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$  on  $x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x + 4y = 3$ . Määritä origon siirrolla ja kantavektorien kierrolla toinen koordinaatisto  $\{O', \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta\}$ , jossa  $S$ :n yhtälö pelkistyy muotoon  $a\xi^2 + b\eta^2 = 1$ . Laske vakiot  $a, b$  ja luokittele käyrä.
2. Olkoon  $f(x) = e^x$  ja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ \& \ 0 < y < f(x)\}$ .
  - a) Näytä, että  $A$ :n Jordanin ulkomitalle (pinta-alamitta) pätee jokaisella  $n \in \mathbb{N}$  epäyhtälö

$$\bar{\mu}(A) \leq h \sum_{k=1}^n f(kh), \quad h = n^{-1}.$$

b) Johda arvio myös sisämitalle  $\underline{\mu}(A)$ . Yhdistämällä arviot näytä, että  $A$  on mitallinen ja että  $\mu(A) = e - 1$ .

3. Kappaleessa  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \ \& \ |z| \leq R\}$  on massatiheys lieriökoordinaateissa  $\rho(r, \varphi, z) = \rho_0 (r/R)^4 (z/R)^2$ , missä  $\rho_0$  on vakio. Laske luvut  $k_1$  ja  $k_2$  kaavoissa  $I_x = I_y = k_1 m R^2$  ja  $I_z = k_2 m R^2$ , missä  $m$  = kappaleen massa ja  $I_x, I_y, I_z$  = hitausmomentit koordinaattiakselien suhteen. Suorita tarvittavat integroinnit lieriökoordinaateissa!
4. Olkoon  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ . Laske vektorikentän  $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$  vuo  $V$ :n reunapinnan  $\partial V$  läpi  $V$ :n sisältä ulospäin
  - a) Gaussin lauseen avulla,
  - b) suoraan pintaintegraalina.