

Mat-2.3111 Stokastiset prosessit

Tentti 9.5.2009

Tentissä saa käyttää kaavakokoelmaa ja graafista laskinta.

Poropudas

Kirjoita koepaperiin selvästi seuraavat tiedot:

- Mat-2.3111 Stokastiset prosessit, tentti 9.5.2009
- opiskelijanumero, TEKSTIPEN sukunimi, etunimet, puhutelmuni alleviivattuna
- koulutusohjelmaa (ei osasto), vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmaa
- nimitäjoitus

Perustelee kaikki vastauksesi luolellisesti.

1. Mallinetaan ihmisen nukkumista diskreettiaikaisella Markov-ketjulla X_n , $n \geq 0$, jonka tilajonkko on $\{0, 1, 2\}$. Ketjun tilat kuvastavat nukkujan unen syvyyttä siten, että 0 := "hereillä", 1 := "unessa", ja 2 := "syvässä unessa". Oletetaan, että siirtynyt tilojen välillä noudattavat yhden askeleen tilausiirtotodennäköisyysmatriisia

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ q & 1/2-q & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

missä yksi aika-askel vastatkoon viittä minuuttia.

- a) Oletetaan, että hyväunisuella ihmisellä $p = 4/5$ ja $q = 1/10$. Ratkaise ketjun stationaarinen jakauma ja kuvaile sen avulla hyväunisuuden ihmisen nukkumista pitkällä aikavälillä.
- b) Huononisuella ihmisellä $p = 1/2$ ja $q = 1/5$. Kuvaile sopivilla laskelmilla, miten hyvä- ja huononuisen ihmisen nukkuminen poikkeavat mallissa toisistaan.
- c) Kuinka suuri osa tilausiirtymistä a)- ja b)-kohdittien tapauksissa on "heräämisää" eli siirtymää tilasta 1 tilaan 0, kun tarkastellaan nukkumista pitkällä aikavälillä.
2. Oletetaan, että tehtävän 1 a)-kohdan hyväuninen ihminen on "hereillä" ajanhetkellä $n = 0$, $X_0 = 0$. Millä todennäköisyydellä hän on hereillä viidentoista minuutin kuluessa? Toisin sanoen, laske todennäköisyys $P(X_3 = 0 | X_0 = 0)$.

3. Kuvataan jonon pituutta yhden "palvelijan" palvelupisteessä jatkuva-aikaisella Markov-ketjulla N_t , $t \geq 0$. Oletetaan, että asiakkaiden saapumiset muodostavat Poisson-prosessin intensiteetillä λ . Vastaavasti asiakkaiden palveluajat ovat riippumattomia ja noudattavat eksponentiaalijakaumaa odotusarvolla $1/\mu$.

- a) Muodosta ketjulle tilausiirtensiteettimatriisi Q .
- b) Millä ehdolla ketjulla on stationaarinen jakauma? Perustelee. Ratkaise tämä jakauma.
- c) Laske stationaarista jakaumaa lyödyntäen jonon keskinääräinen pituus pitkällä aikavälillä ja yksittäisen asiakkaan systeemissä keskimäärin vietämä aika.
4. Olkoon B_t , $t \geq 0$, standardoitu Brownin liike. Laske todennäköisyys $P(B_1 > \sqrt{t})$. Miten tämä todennäköisyys käyttäytyy, kun $t \rightarrow \infty$? Selitä saamasi tulos myös sanallisesti.
5. Oletetaan, että stokastinen prosessi M_n , $n \geq 0$, on martingaali. Prosessin tilajonkko on $S = \{0, 1, 2\}$. Osoita, että tilojen 0 ja 2 on oltava absorboivia.

*Tentissä jaettiin myös Lainisen muodelta 1987
lona kaavakokoelma, jossa oli muun
normaalijakauman kertymäfunktion taulukko.*