Tfy-0.2124 Kvanttimekaniikka tentti 16.1.2009

1. Tarkastellaan yksiulotteista kvanttimekaanista harmonista oskillaattoria (massa = m), jonka potentiaalienergia on $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

   (ω on vastaavan klassillisen oskillaattorin kulmataajuus).

   a) Osoita, että operaattorille $\hat{a}_+ = (2\hbar\, m\omega)^{-1/2}(-i\hat{p} + m\omega\,\hat{x})$

   ($\hat{p}$ on liikemääräoperaattori) ja $\hat{a}_+$:n Hermiittiskonjugoidulle operaattorille $\hat{a}_- = \hat{a}_+^{\dagger}$ on voimassa relaatio $\hat{a}_-\hat{a}_+ = 1 + \hat{a}_+\hat{a}_-$.

   b) Kirjoita systeemin Hamiltonin operaattori $\hat{H}$ ja lausu se operaattorien $\hat{a}_+$ ja $\hat{a}_-$ avulla.

   c) Osoita, että operaattorin $\hat{a}_+\hat{a}_-$ alin ominaisarvo λ_0 ei voi olla negatiivinen:

   $$\lambda_0 \geq 0.$$

   d) Itse asiassa voidaan päätellä, että $\lambda_0 = 0$. Ratkaise tätä tulosta ja a) ja b) -kohdan tuloksia käyttäen $\hat{H}$:n ominaisarvospektri. (8 p.)

2. Tarkastellaan pitkin x-akselia liikuvan m-massaisen hiukkasen tunneloitumista deltafunktiovallin läpi. Deltafunktiovallin potentiaalienergia on

   $V(x) = \alpha\delta(x), \qquad \alpha > 0.$

   Oletetaan, että tunneloitumista voidaan tarkastella stationaarisena (ajasta riippumattomana sirontatapahtumana ja että heijastus- ja läpäisykertoimet (R ja T) voidaan laskea Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ominaisfunktiosta. Oletetaan, että alueessa $x > 0$ ei esiinny liikettä negatiivisen x-akselin suuntaan. Ratkaise läpäisykerroin T ja heijastuskerroin R ominaisenergian E funktiona. Selitä kvalitatiivisesti tunnelointia E:n funktiona. (7 p.)

3. Tarkastellaan kahden observaabelin A ja B yleistettyä epämääräisyysperiaatetta. Määritellään

   $$f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$$
   $$g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi.$$

   Koska $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ ovat Hermiittisiä operaattoreita, voidaan A:n standardipoikkeaman neliö σ_A^2 lausua muodossa

   $$\sigma_A^2 = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \Psi \rangle = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi \rangle = \langle f | f \rangle.$$

   Samoin voidaan lausua $\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle$.

   a) Lähtien liikkeelle Schwarzin epäyhtälöstä

   $$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

   johda (yleistetty) epämääräisyysperiaate

   $$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 .$$

   b) Käyttäen a)-kohdan tulosta, johda "tavallinen" paikan ja liikemäärän välinen Heisenbergin epämääräisyysperiaate sekä johda lisäksi lauseke minimiepämääräisyysaaltopaketille. (8 p.)

K Ä Ä N N Ä

4. Elektronin spinoperaattorille $\hat{\mathbf{S}}$ ovat voimassa samat peruskommutaatiosäännöt kuin (rata)liikemäärän momentti-operaattorille $\hat{\mathbf{L}}$:

$$\left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z$$

$$\left[\hat{S}_y,\hat{S}_z\right] = i\hbar\hat{S}_x$$

$$\left[\hat{S}_z,\hat{S}_x\right] = i\hbar\hat{S}_y \ .$$

a) Osoita. että $\hat{S}^2$ kommutoi $\hat{\mathbf{S}}$:n komponenttien $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ ja $\hat{S}_z$ kanssa.

Valitaan kommutoiviksi operaattoreiksi $\hat{S}^2$ ja $\hat{S}_z$, joiden ominaisarvoyhtälöt ovat

$$\hat{S}^2\chi_\pm = \hbar^2 s(s+1)\chi_\pm, \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\hat{S}_z\chi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm ,$$

b) Määritellään operaattorit

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y,$$

$$S_+\chi_+ = 0 \ , \ S_+\chi_- = \hbar\chi_+ ,$$

$$S_-\chi_- = 0 \ , \ S_-\chi_+ = \hbar\chi_- .$$

Kirjoita esitysmatriisit $\hat{S}_x$:lle, $\hat{S}_y$:lle, $\hat{S}_z$:lle ja $\hat{S}^2$:lle ominaisspinorifunktioiden χ_+ ja χ_- muodostamassa kannassa.

c) Ratkaise $\hat{S}_x$:n esitysmatriisin ominaisarvoyhtälö. Mitä arvoja voidaan saada S_x:n mittauksesta? (7p.)

Opiskelijanumero (myös kirjain), nimi, koulutusohjelma, opintojakson koodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiin.