

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 3 16.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Määritä kiintopisteiteraation

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{6x_n}(x_n^2 - 2x_n + 1)(2x_n - 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

mahdolliset raja-arvot $c = \lim_n x_n$ ja luokittele nämä attraktiivisiksi tai repulsiivisiksi. Attraktiivisissa tapauksissa määritä suppenemisen asymptoottinen laatu olettaen, että x_0 on riittävän lähellä c :tä, mutta $x_0 \neq c$.

2. Määritä funktion $f(x) = (1/x)^x$, $x \in (0, \infty)$ raja-arvot $f(0^+)$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ sekä funktion pienin ja suurin arvo, mikäli olemassa.
3. Avaruuskäyrän $S : y = x^2, z = y^2$ tangentit leikkaavat xy -tason pitkin tasokäyrää K . Määritä a) käyrän S tangenttivektori pisteessä $P = (1, 1, 1) \in S$, b) käyrän K tangenttivektori pisteessä $Q = (-3, 8, 0) \in K$.
4. Määritellään pisteen $x = 0$ ympäristössä säännöllinen (sileä) funktio $y(x)$ yhtälöllä

$$y(\cos y - \sin y) = 2 \sin x + \cos x + ax + b.$$

- a) Määritä vakiot a ja b , kun tiedetään, että $y(x)$ saavuttaa pisteessä $x = 0$ paikallisen ääriarvon $y(0) = 0$. Onko kyseessä maksimi vai minimi?
- b) Oletetaan, että $y(0) = 0$ ja $a = -1$. Laske rationaalinen approksimaatio luvulle $y(1/10)$ käyttäen funktion $y(x)$ approksimointiin toisen asteen Taylorin polynomia $T_2(x, 0)$. Kuinka suureksi arvioit approksimaativirheen?

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanföreläsning 3 16.12.2008

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutföreläsning eller mellanföreläsning med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Bestäm möjliga gränsvärden $c = \lim_n x_n$ för fixpunktsiterationen

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{6x_n}(x_n^2 - 2x_n + 1)(2x_n - 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

och klassificera dem som attraktiva eller repulsiva. I attraktiva fall bestäm konvergensens asymptotiska natur förutsatt att x_0 är tillräckligt nära c , men $x_0 \neq c$.

2. Bestäm gränsvärdena $f(0^+)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ hos funktionen $f(x) = (1/x)^x$, $x \in (0, \infty)$ samt funktionens minsta och största värde, om den har några sådana.
3. Tangentlinjerna till rymdkurvan $S : y = x^2, z = y^2$ skär xy -planet längs en plankurva K . Bestäm a) en tangentvektor till kurvan S i punkten $P = (1, 1, 1) \in S$, b) en tangentvektor till kurvan K i punkten $Q = (-3, 8, 0) \in K$.
4. Vi definierar en reguljär (slät) funktion $y(x)$ i en omgivning av punkten $x = 0$ via ekvationen

$$y(\cos y - \sin y) = 2 \sin x + \cos x + ax + b.$$

- a) Bestäm konstanterna a och b , då man vet att $y(x)$ har ett lokalt extremvärde $y(0) = 0$ i punkten $x = 0$. Rör det sig om ett maximum eller minimum?
- b) Antag att $y(0) = 0$ och $a = -1$. Beräkna en rationell approximation till talet $y(1/10)$ genom att approximera funktionen $y(x)$ med 2:a gradens Taylor-polynom $T_2(x, 0)$. Hur stort uppskattar du att approximationsfelet är?