

AS-74. 1102 Säättötekniikan matemaattiset apuneuvot / Tentti 18. 12. 2008

10 tehtävää.

Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta laskujen kulku voidaan arvostelussa selvittää. Tentissä saa olla mukana kirja: Virkkunen, Säättötekniikan matematiikkaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua.

1. Laplacemuunna

a. $-5e^{2t}$ b. t^3e^{-5t} c. $5e^{-3t}\cos(4t)$

2. Käänteismuunna

a. $F(s) = \frac{3}{s-4}$ b. $F(s) = \frac{2}{s(s+2)}$ c. $F(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$

3. a. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot.

b. Muodosta matriisin A karakteristinen yhtälö.

c. Osoita laskemalla, että Cayley-Hamiltonin teoreema pätee matriisiin A sovellettuna.

4. Laske matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

a. determinantti

b. käänteismatriisi

5. Tarkastellaan lukujonoa $y(k) = e^{-ak}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ jossa a on reaalinen parametri.

Laske suoraan määritelmän perusteella lukujonon z-muunnos. Millä ehdolla muunnoksen määrittävä sarja konvergoi?

6. Systeemiä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = r(t)$$

jossa $y(t)$ on lähtösuure ja $r(t)$ tulosuure. Määrää systeemin

- a. tilaesitys
- b. siirtofunktio $Y(s) / R(s)$.

7. Järjestelmän tilaesitys on

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \ 1] x(t)$$

- a. Muodosta siirtofunktio $G(s) = Y(s) / U(s)$.
- b. Laske järjestelmän yksikköimpulssivaste.

8. Epälineaarista järjestelmää kuvaa (epälineaarinen) tilaesitys

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_1^2(t) - x_2(t)$$

- a. Laske järjestelmän mahdolliset tasapainopisteet.
- b. Linearisoi järjestelmä tasapainopisteissä.
- c. Mitä voidaan sanoa linearisoitujen järjestelmien stabiilisuudesta?

9. Ratkaise alla oleva differenssiyhtälö käyttämällä z-muunnosta

$$x(k+2) - x(k) = 0, \quad x(0) = 1, x(1) = 0$$

10. Olkoon A $n \times n$ -dimensioinen neliömatriisi. Osoita, että aina pätee $x^T A x = x^T A^T x$, jossa x on mikä tahansa n -dimensioinen pystyvektori. Ohje: Tarkastele matriisien dimensioita. Miten skalaarin käy transponoinnissa?