TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Systeemianalyysin laboratorio

Mat-2.3139 Optimointioppi — Kimmo Berg, *Tentti, 15.01.2009*

1. a) Määritä lokaali ja globaali minimi. Selitä mitä tarkoittavat välttämätön optimaalisuusehto ja riittävä optimaalisuusehto.

   b) Määritä konveksi joukko ja konveksi funktio.

   c) Määritä konveksi optimointitehtävä. Osoita että konveksin rajoittamattoman tehtävän lokaali minimi on myös globaali.

   d) Kirjoita konveksin optimointitehtävän välttämätön ja riittävä optimaalisuusehto. Määrittele tarvitsemasi käsitteet.

   e) Sovella edellisen kohdan ehtoa tehtävään

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1-4)^2+(x_2-6)^2 \\ \text{s.e.} & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 4. \end{array}$$

   Todista että tehtävällä on olemassa ratkaisu. Tutki toteuttaako piste (2,4) optimaalisuusehdon? Onko piste tehtävän ratkaisu?

2. a) Selosta Armijon säännön idea.

   b) Määritä konvergenssiasteen käsite.

   c) Mitä tarkoitetaan eksaktilla sakkofunktiolla?

   d) Määritä separoiva hypertaso.

   e) Mitä tarkoitetaan konditioluvulla?

   f) Mitä tarkoitetaan duaaliaukolla?

3. a) Esitä tehtävän

$$\begin{array}{lll} \min & f(\mathbf{x}) & \\ \text{s.e.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i=1,\ldots,m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, & i=1,\ldots,l \end{array}$$

   välttämättömät KKT-ehdot.

   b) Olkoon annettuna funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ perspektiivifunktio $g : \Re^{n+1} \mapsto \Re$, jonka määrittää

$$g(x,t) = t \cdot f(x/t),$$

   missä $x \in \Re^n$ ja $t > 0$. Perspektiivifunktio säilyttää konveksisuuden, eli jos f konveksi, niin g konveksi. Todista että myös funktiot

$$a(x,t) = \frac{x^T x}{t}, \quad b(x) = \frac{\|Ax+b\|_2^2}{c^T x + d},$$

   ovat konvekseja, missä $A \in \Re^{m \times n}$, $c \in \Re^n$ ja $c^T x + d > 0$. Perustele.

KÄÄNNÄ!

4. a) Minkälaisille tehtäville primaali-duaali sisäpistemenetelmä on pääasiallisesti tarkoitettu? Selosta lyhyesti menetelmän idea. Johda estefunktiotehtävä ja kirjoita tämän tehtävän KKT ehdot. Miten saat näistä ehdoista sisäpistemenetelmän päivitysyhtälöt?

   b) Mitä eri vaiheita toistetun kvadraattisen optimoinnin menetelmässä (*sequential quadratic programming*, SQP) on? Selitä myös mitä tarkoitetaan Maratos efektillä.

5. Kuluttajalla on tulot $I > 0$, ja markkinoiden hintavektori on $p \in \Re^3_{++}$ kolmelle tuotteelle. Kaikkia tuotteita on kulutettava positiivinen määrä. Lisäksi, hänen tulee kuluttaa vähintään kaksi yksikköä tuotetta 2 ja enintään yksi yksikkö tuotetta 1. Formuloi kuluttajan optimointitehtävä. Laske optimaalinen kulutus kun $I = 4$, $p = (1, 1, 1)$ ja $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$. Mitä jos $I = 6$ ja $p = (1, 2, 3)$? Perustelut.