Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Leppänen

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 1 23.02.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Johda palautuskaava (reduktiokaava) integraaleille

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

ja laske I_n, kun $n = 2, 3$ ja 4.

2. Luvuista

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{6/5}}$$

tiedetään, että $s_n = 5.3415824\ldots$ kun $n = 3200000$. Lähtien tästä tiedosta laske rajaarvolle $s = \lim_n s_n$ approksimaatio, jossa on mahdollisimman monta merkitsevää numeroa oikein. Esitä myös perusteltu virhearvio!

3. Alkuarvotehtävässä

$$\begin{cases} y'' = e^{2y}, & x \in (-a, a) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

on a:lle asetettu suurin mahdollinen arvo siten, että tehtävällä on ratkaisu. Määritä ratkaisu $y(x)$ sekä a.

4. a) Näytä matriisialgebran keinoin, että jos $\mathbf{A}$ on kokoa $n \times n$ ja yhtälöryhmällä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on ratkaisu jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, niin on olemassa neliömatriisi $\mathbf{B}$ siten, että $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.
b) Matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

on ominaisuus: $\lambda\mathbf{A}$ on ortogonaalinen eräällä $\lambda \in \mathbb{R}$. Määritä tätä tietoa hyväksi käyttäen vaakavektori $\mathbf{x}^T$ siten, että $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = [6, 14, 4, -20]$.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Leppänen

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Mellanförhör 1 23.02.2009

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Härled en reduktionsformel för integralerna

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

och beräkna I_n, då $n = 2, 3$ och 4.

2. Om talen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{6/5}}$$

vet man, att $s_n = 5.3415824\ldots$ då $n = 3200000$. Beräkna utgående från den informationen en approximation av gränsvärdet $s = \lim_n s_n$, som har så många korrekta gällande siffror som möjligt. Motivera även uppskattningen för felet!

3. I begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = e^{2y}, & x \in (-a, a) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

har a givits största möjliga värdet, för vilket problemet har en lösning. Bestäm lösningen $y(x)$ samt a.

4. a) Visa med hjälp av metoder från matrisalgebra, att om $\mathbf{A}$ är av typ $n \times n$ och ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, så finns det en kvadratisk matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.
b) Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

har egenskapen: $\lambda\mathbf{A}$ är ortogonal för ett visst $\lambda \in \mathbb{R}$. Använd den informationen för att bestämma en radvektor $\mathbf{x}^T$ sådan att $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = [6, 14, 4, -20]$.