Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Leppänen

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 3 06.05.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Tasokäyrän S yhtälö peruskoordinaatistossa $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ on $x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x + 4y = 3$. Määritä origon siirrolla ja kantavektorien kierrolla toinen koordinaatisto $\{O',\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta\}$, jossa S:n yhtälö pelkistyy muotoon $a\xi^2 + b\eta^2 = 1$. Laske vakiot a, b ja luokittele käyrä.

2. Olkoon $f(x) = e^x$ ja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \;\;\&\;\; 0 < y < f(x)\}$.

   a) Näytä, että A:n Jordanin ulkomitalle (pinta-alamitta) pätee jokaisella $n \in \mathbb{N}$ epäyhtälö
   $$\overline{\mu}(A) \le h\sum_{k=1}^{n} f(kh), \quad h = n^{-1}.$$
   b) Johda arvio myös sisämitalle $\underline{\mu}(A)$. Yhdistämällä arviot näytä, että A on mitallinen ja että $\mu(A) = e - 1$.

3. Kappaleessa $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le R^2 \;\;\&\;\; |z| \le R\}$ on massatiheys lieriökoordinaateissa $\rho(r,\varphi,z) = \rho_0(r/R)^4(z/R)^2$, missä ρ_0 on vakio. Laske luvut k_1 ja k_2 kaavoissa $I_x = I_y = k_1 mR^2$ ja $I_z = k_2 mR^2$, missä m = kappaleen massa ja I_x, I_y, I_z = hitausmomentit koordinaattiakselien suhteen. Suorita tarvittavat integroinnit lieriökoordinaateissa!

4. Olkoon $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. Laske vektorikentän $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$ vuo V:n reunapinnan ∂V läpi V:n sisältä ulospäin

   a) Gaussin lauseen avulla,

   b) suoraan pintaintegraalina.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Leppänen

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Mellanförhör 3 06.05.2009

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Den plana kurvan S har ekvationen $x^2 - 2y^2 + 4xy + 2x + 4y = 3$ i standardkoordinatsystemet $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Bestäm via förskjutning av origo och vridning av basvektorerna ett annat koordinatsystem $\{O', \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta\}$, i vilket ekvationen för S förenklas till formen $a\xi^2 + b\eta^2 = 1$. Beräkna konstanterna a, b och klassificera kurvan.

2. Låt $f(x) = e^x$ och $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \;\; \& \;\; 0 < y < f(x)\}$.
   a) Visa, att för A:s yttre Jordan-mått (area-måttet) gäller för varje $n \in \mathbb{N}$ olikheten
   $$\overline{\mu}(A) \leq h \sum_{k=1}^{n} f(kh), \qquad h = n^{-1}.$$
   b) Härled även en olikhet för A:s inre Jordan-mått $\underline{\mu}(A)$. Visa att A har Jordan-mått och att $\mu(A) = e - 1$ genom att kombinera olikheterna.

3. Densiteten hos kroppen $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \;\; \& \;\; |z| \leq R\}$ ges i cylindriska koordinater av $\rho(r, \varphi, z) = \rho_0 (r/R)^4 (z/R)^2$, där ρ_0 är en konstant. Beräkna talen k_1 och k_2 i formlerna $I_x = I_y = k_1 m R^2$ och $I_z = k_2 m R^2$, där m är kroppens massa och I_x, I_y, I_z = tröghetsmomenten med avseende på koordinataxlarna. Utför de nödvändiga integreringarna i cylindriska koordinater!

4. Låt $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$ ut ur V genom dess randyta ∂V
   a) med hjälp av Gauss' sats,
   b) direkt som en ytintegral.