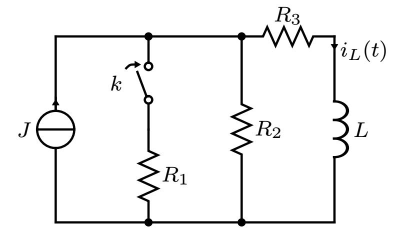
Laske tehtävät 1 – 3 eri paperille kuin tehtävät 4 – 5. Muista kirjoittaa jokaiseen paperiin **selvästi** nimi, opiskelijanumero, kurssin nimi ja koodi.
Tehtävät lasketaan osaston koepaperille. Muita papereita ei tarkasteta.

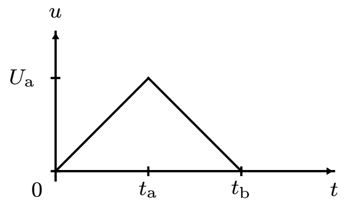
1.



Kytkin k suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske $i_L(t)$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen sulkemista.

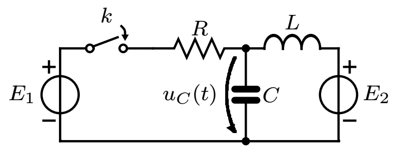
$$J = 5\,\mathrm{A} \quad R_1 = 2\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega$$
$$R_3 = 4\ \Omega \quad L = 10\,\mathrm{H}.$$

2.



Johda viereisen kuvan muotoisen pulssin Laplace-muunnos kun $t_\mathrm{b} = 2 \cdot t_\mathrm{a}$.

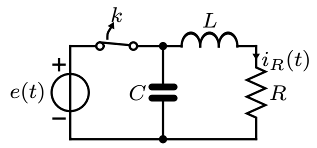
3.



Kytkin k suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske $u_C(t)$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen sulkemista.

$$E_1 = 3\,\mathrm{V} \quad E_2 = 1\,\mathrm{V} \quad R = 2\ \Omega$$
$$C = 4\,\mathrm{F} \quad L = 1\,\mathrm{H}.$$

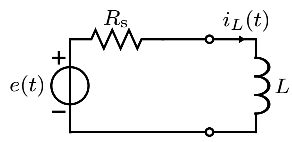
4.



Oheisessa piirissä kytkin k avataan hetkellä $t = 0$. Laske resistanssin virta $i_R(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen, kun $e(t) = \hat{e}\,\cos\omega t$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista.

$$\hat{e} = 1\,\mathrm{V} \quad \omega = 1000\ \mathrm{rad/s} \quad R = 1\ \Omega$$
$$C = 1\,\mathrm{mF} \quad L = 1\,\mathrm{mH}.$$

5.



Tasasuuntaajaa voidaan kuvata jännitelähteellä, jonka lähdejännite on $e(t)$ ja sisäresistanssi R_s. Laske kuormituksena olevan induktanssin L virran hetkellisarvo $i_L(t)$ ja tehollisarvo I jatkuvuustilassa.

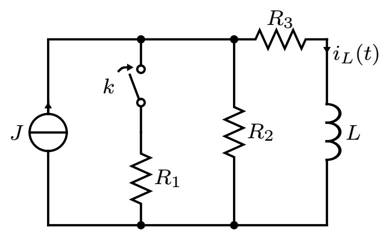
$$e(t) = E_0 - \hat{e}_2 \cos 2\omega t - \hat{e}_4 \cos 4\omega t$$

$$E_0 = 63{,}7\,\mathrm{V} \quad \hat{e}_2 = 42{,}4\,\mathrm{V} \quad \hat{e}_4 = 8{,}5\,\mathrm{V}$$
$$\omega = 100\pi\ \mathrm{rad/s} \quad R_\mathrm{s} = 40\ \Omega \quad L = 100\,\mathrm{mH}.$$

Tutkintosääntö antaa mahdollisuuden järjestää lisäharjoitusta niille opiskelijoille, jotka ovat saaneet kolmesti hylätyn arvosanan välikokeista tai tentistä. Tämä tarkoittaa sitä, että saatuaan kolme nollaa, opiskelijan on palautettava laskettuna 20 assistentin määräämää lisätehtävää ennen seuraavaan tenttiin tai välikokeeseen osallistumista. Välikokeet ja välikokeen uusinta tai uusintatilaisuudessa tehty tentti lasketaan yhdeksi yritykseksi. Yksittäinen välikoe lasketaan puolikkaaksi suorituskerraksi.

Läsnäolo koetilaisuudessa lasketaan yritykseksi, samoin tenttiin ilmoittautuminen.

0.1



Kytkin k suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske $i_L(t)$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen sulkemista.

$$J = 5\,\mathrm{A} \quad R_1 = 2\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega$$
$$R_3 = 4\ \Omega \quad L = 10\,\mathrm{H}.$$

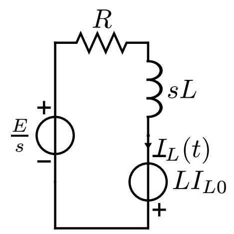
Ratkaistaan piirin alkutila ennen kytkimen sulkemista.

$$I_{L0} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} J = \frac{5}{3}\,\mathrm{A}.$$

Kytkin suljetaan. Yksinkertaistetaan piiriä yhdistämällä rinnankytketyt resistanssit.

$$R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1\,\Omega$$

Tehdään lähdemuunnos, jolloin jännitelähteen arvoksi saadaan $E = JR_4 = 5\,\mathrm{V}$ ja yhdistetään vielä sarjaresistanssit $R = R_4 + R_3 = 5\,\Omega$.
Muodostetaan sijaiskytkentä.



Kirjoitetaan piirille silmukkayhtälö

$$(R + sL)I_L = \frac{E}{s} + LI_{L0}$$

ja ratkaistaan siitä

$$I_L = \frac{\frac{E}{s} + LI_{L0}}{R + sL} = \frac{\frac{5}{s} + \frac{50}{3}}{10s + 5} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}s}{s(s + \frac{1}{2})}$$

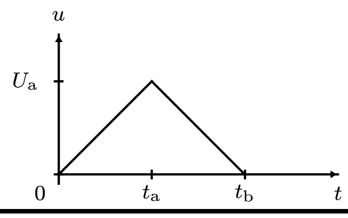
Tehdään osamurtokehitelmä:

$$I_L = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}s}{s(s + \frac{1}{2})} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{(s + \frac{1}{2})}.$$

Lopuksi vielä Laplace-käänteismuunnetaan.

$$i_L(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t/2} + 1\right)\varepsilon(t)$$

0.2



Johda viereisen kuvan muotoisen pulssin Laplace-muunnos kun $t_\mathrm{b} = 2 \cdot t_\mathrm{a}$.

Tapa I:
Kirjoitetaan kullekin alueelle yhtälö, jota kerrotaan pulssifunktiolla. Sijoitetaan heti alussa $t_\mathrm{b} = 2t_\mathrm{a}$. Saadaan:

$$u(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t \left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_\mathrm{a})\right] + \left[-\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t + 2U_\mathrm{a}\right] \left[\varepsilon(t - t_\mathrm{a}) - \varepsilon(t - 2t_\mathrm{a})\right]$$

Kerrotaan sulut auki:

$$u(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t\varepsilon(t) - 2\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t\varepsilon(t - t_\mathrm{a}) + \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t\varepsilon(t - 2t_\mathrm{a}) + 2U_\mathrm{a}\varepsilon(t - t_\mathrm{a}) - 2U_\mathrm{a}\varepsilon(t - 2t_\mathrm{a})$$

Muunnostaulukon kaava 7 edellyttää, että viivästetyllä askelfunktiolla painotettua funktiota viivästetään yhtä paljon kuin askelfunktiotakin. Siis toisin sanoen $f(t - t_\mathrm{a})\varepsilon(t - t_\mathrm{a})$ voidaan muuntaa, mutta $f(t - t_\mathrm{a})\varepsilon(t - 2t_\mathrm{a})$ ei voida muuntaa.
Yhdistetään termit, joissa ε-termin argumentit ovat samat ja kirjoitetaan lisäksi U_a muotoon $\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t_\mathrm{a}$.

$$u(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} t\varepsilon(t) - 2\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} (t - t_\mathrm{a})\varepsilon(t - t_\mathrm{a}) + \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} (t - 2t_\mathrm{a})\varepsilon(t - 2t_\mathrm{a})$$

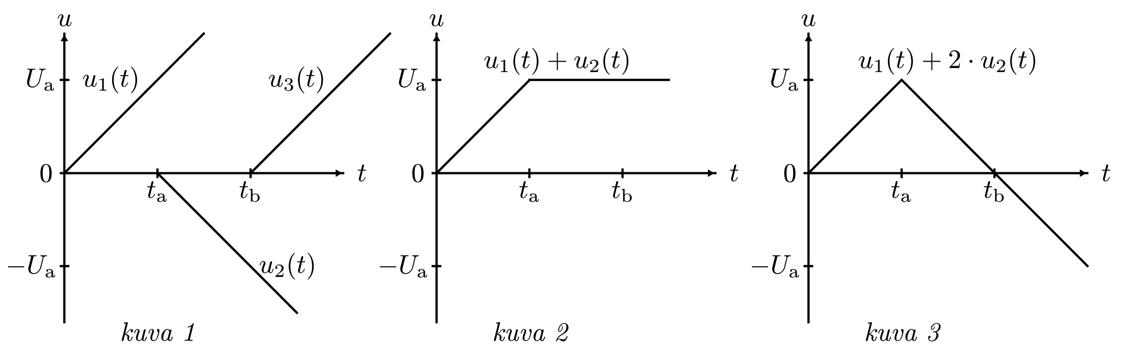
Lauseke on nyt oikeaa muotoa ja sille voidaan etsiä Laplace-muunnos. Muunnettavana on funktio $f(t) = t$ eli $f(t - t_\mathrm{a}) = t - t_\mathrm{a}$.

$$U(s) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-t_\mathrm{a} s} \cdot \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2} + \mathrm{e}^{-2t_\mathrm{a} s} \cdot \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Ratkaisu voidaan sieventää muotoon:

$$U(s) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a} s^2} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-t_\mathrm{a} s})^2.$$

Tapa II:
Aloitetaan etsimällä pulssia kuvaava ajan funktio. Kuvan mukainen paloittain lineaarinen funktio voidaan koota suorista, joita painotetaan askelfunktioilla.



kuva 1 *kuva 2* *kuva 3*

Ensimmäiselle kuvan *1* suorista saadaan lauseke:

$$u_1(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot t \cdot \varepsilon(t).$$

Toisen suoran lauseke on

$$u_2(t) = \frac{-U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot (t - t_\mathrm{a}) \cdot \varepsilon(t - t_\mathrm{a}).$$

Viivästetty askelfunktio $\varepsilon(t - t_\mathrm{a})$ pitää funktion $u_2(t)$ nollassa ennen ajan hetkeä $t = t_\mathrm{a}$. Kerroin t on pitänyt korvata kertoimella $t - t_\mathrm{a}$ origon siirtämiseksi kohtaan $t = t_\mathrm{a}$.
Jos nämä kaksi funktiota lasketaan yhteen (kuva *2*), saadaan funktio, joka on aluksi nolla ja alkaa kasvaa kulmakertoimella $\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}}$. Hetkellä $t = t_\mathrm{a}$ funktio saavuttaa arvon U_a ja pysyy sen jälkeen vakiona.
Kun tähän lisätään vielä toisen kerran $u_2(t)$, (kuva *3*) saadaan funktio, joka pienenee hetken $t = t_\mathrm{a}$ jälkeen

kulmakertoimella $\frac{-U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}}$. Funktio pitää saada vielä jäämään nollaan hetken $t = 2t_\mathrm{a}$ jälkeen. Tarvitaan siis vielä kolmas funktio $u_3(t)$, jolla lasku pysäytetään.

$$u_3(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot (t - 2t_\mathrm{a}) \cdot \varepsilon(t - 2t_\mathrm{a})$$

Kun verrataan funktioita $u_1(t)$, $u_2(t)$ ja $u_3(t)$ huomataan, että $u_2(t)$ ja $u_3(t)$ voidaan kirjoittaa funktion $u_1(t)$ avulla.

$$u_2(t) = -u_1(t - t_\mathrm{a}) \quad \text{ja} \quad u_3(t) = u_1(t - 2t_\mathrm{a})$$

Koko funktio voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$u(t) = u_1(t) - 2u_1(t - t_\mathrm{a}) + u_1(t - 2t_\mathrm{a}).$$

$u_1(t)$:n Laplace-muunnos on

$$u_1(t) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot t \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow U_1(s) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Askelfunktiota $\varepsilon(t)$ ei erikseen muunneta, koska se sisältyy kaikkiin taulukon funktioihin. Funktiot $u_2(t)$ ja $u_3(t)$ voidaan muuntaa taulukon kaavan 7 avulla.

$$u_2(t) = -u_1(t - t_\mathrm{a}) \Rightarrow U_2(s) = -\mathrm{e}^{-t_\mathrm{a}s} \cdot U_1(s)$$

$$u_3(t) = u_1(t - 2t_\mathrm{a}) \Rightarrow U_3(s) = \mathrm{e}^{-2t_\mathrm{a}s} \cdot U_1(s).$$

Koko funktion Laplace-muunnos saadaan nyt yhdistämällä edelliset tulokset:

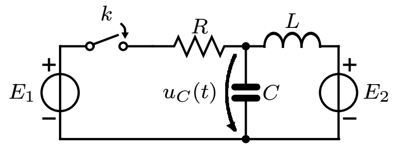
$$u(t) = u_1(t) + 2u_2(t) + u_3(t)$$

$$\Rightarrow U(s) = U_1(s) + 2U_2(s) + U_3(s) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-t_\mathrm{a}s} \cdot \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2} + \mathrm{e}^{-2t_\mathrm{a}s} \cdot \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Kun otetaan $\frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}s^2}$ yhteiseksi tekijäksi, saadaan edellinen sievennettyä muotoon

$$U(s) = \frac{U_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}s^2} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-t_\mathrm{a}s})^2.$$

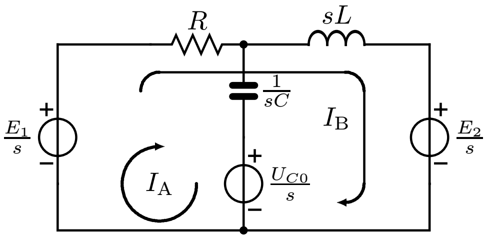
0.3



Kytkin k suljetaan hetkellä $t = 0$. Laske $u_C(t)$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen sulkemista.

$$E_1 = 3\,\mathrm{V} \quad E_2 = 1\,\mathrm{V} \quad R = 2\,\Omega$$
$$C = 4\,\mathrm{F} \quad L = 1\,\mathrm{H}.$$

Alkutila: $I_{L0} = 0\,\mathrm{A}$ ja $U_{C0} = E_2 = 1\,\mathrm{V}$.
Suljetaan kytkin:



Kirjoitetaan silmukkayhtälöt:

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{sC} & R \\ R & R + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mathrm{A} \\ I_\mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{s} - \frac{E_2}{s} \\ \frac{E_1}{s} - \frac{U_{C0}}{s} \end{bmatrix}$$

Sijoitetaan lukuarvot:

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{4s} & 2 \\ 2 & 2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mathrm{A} \\ I_\mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ \frac{2}{s} \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan I_A:

$$I_\mathrm{A} = \frac{2}{2s + \frac{1}{2s} + \frac{1}{4}}$$

Kapasitanssin kokonaisjännite on

$$U_C = \frac{1}{sC} I_\mathrm{A} + \frac{U_{C0}}{s} = \frac{2}{8s^2 + s + 2} + \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{4}}{s^2 + \frac{s}{8} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{s}$$

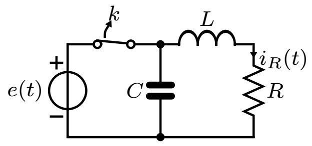
Jännitteen lauseke voidaan muokata muotoon

$$U_C = \frac{\frac{1}{4}\frac{16}{\sqrt{63}}\frac{\sqrt{63}}{16}}{(s + \frac{1}{16})^2 + (\frac{\sqrt{63}}{16})^2} + \frac{1}{s}$$

ja aika-alueessa jännite on

$$u_C(t) = \left[\frac{4}{\sqrt{63}} \sin\left(\frac{\sqrt{63}}{16} t\right) e^{-t/16} + 1\right] \varepsilon(t).$$

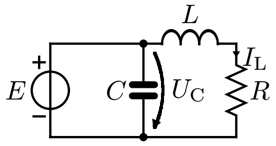
0.4



Oheisessa piirissä kytkin k avataan hetkellä $t = 0$. Laske resistanssin virta $i_R(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen, kun $e(t) = \hat{e}\cos\omega t$. Piiri on jatkuvuustilassa ennen kytkimen avaamista.

$$\hat{e} = 1\,\mathrm{V} \quad \omega = 1000\ \mathrm{rad/s} \quad R = 1\ \Omega$$
$$C = 1\,\mathrm{mF} \quad L = 1\,\mathrm{mH}.$$

Lasketaan alkuarvot ennen kytkimen avaamista:



$$e(t) = \hat{e}\,\cos\omega t = \hat{e}\,\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$U_\mathrm{C} = E = \frac{\hat{e}}{\sqrt{2}}\underline{/90^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/90^o}$$

$$u_\mathrm{C}(t) = e(t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

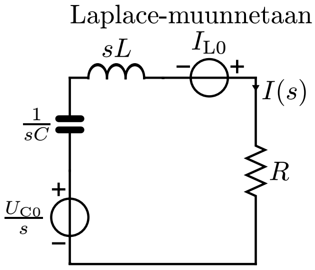
$$U_\mathrm{C0} = u_\mathrm{C}(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$I_\mathrm{L} = \frac{E}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/90^o}}{1+\mathrm{j}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/90^o}}{\sqrt{2}\underline{/45^o}} = \frac{1}{2}\underline{/45^o}$$

$$i_\mathrm{L}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$I_\mathrm{L0} = i_\mathrm{L}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Laplace-muunnetaan piiri:



$$I(s) = \frac{\frac{U_\mathrm{C0}}{s} + LI_\mathrm{L0}}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{CU_\mathrm{C0} + sCLI_\mathrm{L0}}{s^2CL + sCR + 1} = \frac{sI_\mathrm{L0} + \frac{U_\mathrm{C0}}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

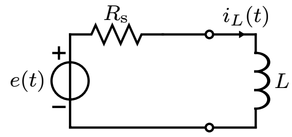
Sijoitetaan lukuarvot:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{1}{2}s + 1000}{s^2 + 1000s + 10^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+2000}{s^2+1000s+10^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+2000}{(s+500)^2 + (500\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s+500}{(s+500)^2+(500\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}\frac{500\sqrt{3}}{(s+500)^2+(500\sqrt{3})^2}\right] \end{aligned}$$

Tehdään käänteismuunnos:

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-500t}[\cos(500\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(500\sqrt{3}t)]\varepsilon(t) = e^{-500t}\,\sin(500\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6})\varepsilon(t)$$

0.5



Tasasuuntaajaa voidaan kuvata jännitelähteellä, jonka lähdejännite on $e(t)$ ja sisäresistanssi R_s. Laske kuormituksena olevan induktanssin L virran hetkellisarvo $i_L(t)$ ja tehollisarvo I jatkuvuustilassa.

$$e(t) = E_0 - \hat{e}_2 \cos 2\omega t - \hat{e}_4 \cos 4\omega t$$

$$E_0 = 63{,}7\,\mathrm{V} \quad \hat{e}_2 = 42{,}4\,\mathrm{V} \quad \hat{e}_4 = 8{,}5\,\mathrm{V}$$
$$\omega = 100\pi \text{ rad/s} \quad R_s = 40\ \Omega \quad L = 100\,\mathrm{mH}.$$

Tarkastellaan taajuuksia erikseen.
Tasajännite:

$$I_{L0} = \frac{E_0}{R_s} = 1,59\,\mathrm{A}$$

Taajuus 2ω:

$$\underline{E}_2 = -\frac{\hat{e}_2}{\sqrt{2}}\underline{/0^o} = -29,98\underline{/0^o}\,\mathrm{V}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{R_s + \mathrm{j}2\omega L} = \frac{-29,98\underline{/0^o}}{40 + \mathrm{j}62,83} = \frac{-29,98\underline{/0^o}}{74,48\underline{/57,52^o}} = -0,403\underline{/-57,52^o}$$

$$i_2(t) = -0,569\cos(2\omega t - 57,52^o \cdot \frac{\pi}{180^o})\,\mathrm{A}.$$

Taajuus 4ω:

$$\underline{E}_4 = -\frac{\hat{e}_4}{\sqrt{2}}\underline{/0^o} = -6,01\underline{/0^o}\,\mathrm{V}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{E}_4}{R_s + \mathrm{j}4\omega L} = \frac{-6,01\underline{/0^o}}{40 + \mathrm{j}125,66} = \frac{-6,01\underline{/0^o}}{131,88\underline{/72,34^o}} = -0,046\underline{/-72,34^o}$$

$$i_4(t) = -0,064\cos(4\omega t - 72,34^o \cdot \frac{\pi}{180^o})\,\mathrm{A}.$$

Lasketaan todellinen kokonaisvirta osatuloksien avulla.
Hetkellisarvo:

$$i(t) = 1,59 - 0,569\cos(2\omega t - 57,52^o \cdot \frac{\pi}{180^o}) - 0,064\cos(4\omega t - 72,34^o \cdot \frac{\pi}{180^o})\,\mathrm{A}.$$

Tehollisarvo:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_2^2 + I_4^2} = \sqrt{I_0^2 + \frac{\hat{i}_2^2}{2} + \frac{\hat{i}_4^2}{2}} = \sqrt{2,536 + 0,162 + 0,002} \approx 1,643\,\mathrm{A}.$$