

## Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 15.05.2009

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Määritä raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

2. Neliömatriisi  $A = (a_{ij})$  on kokoa  $4 \times 4$  ja

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{kun } i = j \\ 1, & \text{kun } j = 1 \text{ ja } i \neq j \\ 3, & \text{kun } (i, j) = (1, 2) \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä  $A$ :n a)  $LU$ -hajotelma, b) spektri (= ominaisarvot).

3. Laske  $y(0)$  ja  $y'(0)$ , kun  $y(x)$  määritellään pisteen  $x = 0$  ympäristössä kaavalla

$$\int_0^1 \frac{e^{xyt}}{x + y + t} dt = 1.$$

4. Janan  $AB$  päätepiste  $A$  on  $xy$ -tason piste  $(x_1, x_2, 0)$  ja päätepiste  $B$  on  $yz$ -tason piste  $(0, x_3, x_4)$ .

a) Laske  $\nabla f(6, 3, -3, 3)$ , missä  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  on janan  $AB$  pituus.

b) Olkoon  $A = (6, 3, 0)$  ja  $B = (0, -3, 3)$ . Siirretään  $A$  pisteeseen  $A'$ , joka on  $A$ :sta etäisyydellä 0.01 suuntaan  $\frac{1}{5}(-3\vec{i} + 4\vec{j})$  ja  $B$  pisteeseen  $B'$ , joka on  $B$ :stä etäisyydellä 0.02 suuntaan  $\frac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k})$ . Approksimoi janojen  $A'B'$  ja  $AB$  pituuksien erotus differentiaalilla avulla.

5. Laske pallokoordinaatteihin siirtymällä integraali

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|z|}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz.$$