

## Mat-1.3431 Ryhmien esitysteoria

Tentti 20.12.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

**Neljä parasta** ratkaisua viidestä huomioidaan arvostelussa — kaikkia tehtäviä saa yrittää. Kokeessa saa käyttää tavallisia kirjoitusvälineitä. Koeaika on 3h.

- (a) Määrittele ryhmän esitys, esityksen redusoitumattomuus ja esitysten ekvivalenssi.  
(b) Todista (a)-kohdan määritelmistä lähtien **Schurin lemmän äärellisdimensioinen versio**, siis että redusoitumattoman esityksen  $\phi : G \rightarrow U(n)$  välittäjäoperaattori  $A \in \text{Hom}(\phi, \phi)$  (englanniksi *intertwining operator*) on muotoa  $A = \lambda I$  jollakin  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
- Mikä on kompaktin ryhmän Haar-funktio, mitkä ominaisuudet karakterisoivat sen? Selitä, miten tämä Haar-funktio konstruoidaan ja miten sen yksikäsitteisyyden voi todeta (pääideat ja määritelmät riittävät, ei tarvitse esittää todistuksia).  
Avainsanoja muistin virkistykseksi: näytemitat, konvoluutiot, "keskiarvoistus", yksikäsitteinen vakiofunktio, siirtoinvarianssi, normalisaatio, positiivisuus (engl. *sampling measures, convolutions, "averaging", unique constant function, translation invariance, normalization, positivity*).
- Määrittele kompaktin ryhmän  $G$  vasen- ja oikeasäännölliset esitykset  $\pi_L$  ja  $\pi_R$ , ja osoita, että ne ovat ekvivalentteja unitaariesityksiä. Mille kompakteille ryhmille säännölliset esitykset ovat redusoituvia?
- Olkoon  $G$  matriisien

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

muodostama joukko, missä  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Osoita, että  $G$  on lineaarinen Lie-ryhmä; laske myös sen Lie-algebra  $\mathfrak{g}$ .

- Varusta 1-dimensioinen kompleksikertoiminen vektoriavaruus  $\mathbb{C}$  Hopf-algebran rakenteella  $(\mathbb{C}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ .