TKK, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — Gripenberg
Mat-1.3601 Johdatus stokastiikkaan
2. välikoe ja loppukoe 15.5.2009

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

Loppukoe: Tehtävät 1-5
2. välikoe: Tehtävät 3-6
Voit suorittaa molempia, jolloin parempi tulos lasketaan!

1. Oletetaan, että X on satunnaismuuttuja, jonka jakaumalla on tiheysfunktio, joka on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ kun $x \geq 0$ missä $\lambda > 0$. Miten voidaan päätellä, että $\mathbb{P}\{X \in [-2,-1]\} = 0$? Määritä ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}\{X \geq t+s | X \geq t\}$ kun $t \geq 0$ ja $s > 0$. Mitä merkille pantavaa vastauksessa on?

2. Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio on $\varphi_X(t) = (1-3it)^{-2}$ Mikä on sattunnaismuuttujan $4X - 2$ karakteristinen funktio?

3. Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samalla tavalla jakautuneita siten, että yhteisellä jakaumalla on tiheysfunktio $f(x) = \frac{1}{2}$ kun $1 \leq |x| \leq 2$. Selitä miten voidaan normaaliapproksimaatiota käyttäen laskea todennäköisyyden $\mathbb{P}\{\sum_{j=1}^{200} X_j \geq a\}$ likiarvo missä a on jokin positiivinen luku?

4. Osoita, että jos $X_n \to_P X$ niin on olemassa osajono $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ siten, että $X_{n_j} \to_{mv} X$.
Vihje: Valitse luvut a_j, b_j ja n_j siten, että $\mathbb{P}\{|X_{n_j} - X| > a_j\} < b_j$, käytä Borel-Cantellin lausetta ja ota lopuksi komplementteja.

5. Osoita, että jos X ja Y ovat todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satunnaismuuttujia siten, että $X \geq_{mv} Y$ ja jos $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ on Ω:n σ-algebra, niin $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \geq_{mv} \mathbf{E}(Y|\mathcal{G})$.

6. Olkoon $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingaali ja T pysäytyshetki (molemmat jonon $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ suhteen missä $\mathcal{F}_n$ on otsoavaruuden Ω σ-algebra ja $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). Mitä voidaan sanoa lausekkeista $\mathbf{E}(X_n)$ ja $\mathbf{E}(X_T)$?

TURN OVER!

TKK, Department of Mathematics and Systems Analysis — Gripenberg

Mat-1.3601 Johdatus stokastiikkaan

Second midterm and final exam 15.5.2009

Write your name, student number, and other information on every paper!
A calculator is allowed in this exam!

Final exams: Problems 1-5
2nd midterm exam: Problems 3-6
You may do both exams in which case the better result counts!

1. Assume that X is a random variable such that its probability distribution has a density function, which is $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ when $x \geq 0$ where $\lambda > 0$. How can one conclude that $\mathbb{P}\{X \in [-2, -1]\} = 0$? Determine the conditional probability $\mathbb{P}\{X \geq t + s | X \geq t\}$ when $t \geq 0$ and $s > 0$. What is remarkable in the answer?

2. The characteristic function of the random variable X is $\varphi_X(t) = (1 - 3it)^{-2}$ What is the characteristic function of the random variable $4X - 2$?

3. The random variables $X_1, X_2, \ldots$ are independent and have the same distribution so that the density function of their common distribution is $f(x) = \frac{1}{2}$ when $1 \leq |x| \leq 2$. Explain how one can, using the normal approximation, find an approximation to the probability $\mathbb{P}\{\sum_{j=1}^{200} X_j \geq a\}$ where a is some positive number?

4. Show that if $X_n \to_P X$ then there is a subsequence $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ so that $X_{n_j} \to_{as} X$.
Hint: Choose numbers a_j, b_j ja n_j so that $\mathbb{P}\{|X_{n_j} - X| > a_j\} < b_j$, use the Borel-Cantelli theorem and finally take complements.

5. Show that if X and Y are random variables in the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ such that $X \geq_{as} Y$ and if $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ is a σ-algebra in Ω, then $\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) \geq_{as} \mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$.

6. Let $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ be a martingale and T a stopping time (both with respect to the sequence $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ where $\mathcal{F}_n$ is a σ-algebra in the state space Ω and $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). What can one say about the expressions $\mathrm{E}(X_n)$ and $\mathrm{E}(X_T)$?

KÄÄNNÄ!