TKK, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Gripenberg
Mat-1.3601 Johdatus stokastiikkaan
1. välikoe 7.3.2009

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. (6p) Erään sairauden toteamiseksi on kehitetty testi, joka ei kuitenkaan aina anna oiketa tulosta siten, että jos henkilöllä on tauti niin testi antaa tähän viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.6 ja jos henkilöllä ei ole tautia niin testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.02. Arvioidaan lisäksi että 1.5 % väestöstä on kyseinen tauti. Mikä on todennäköisyys, että tietyllä henkilöllä on tauti jos testi antaa tähän viittaavan tuloksen?

2. (5p) Olkoon $\mathcal{F} = \{ A \subset \mathbb{R} : A = \cup_{j \in J}[j, j+1), J \subset Z \}$ (missä siis $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko). Osoita, että $\mathcal{F}$ on $\mathbb{R}$:n σ-algebra. Minkälaiset funktiot $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat satunnaismuuttujia, eli mitallisia, σ-algebran $\mathcal{F}$ suhteen?

3. (4p) Sanomme, että satunnaismuuttuja X noudattaa $S(a)$-jakaumaa jos X:n karakteristinen funktio on $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|^a}$ (jolloin oletamme, että $0 < a \leq 2$). Jos X, Y ja Z ovat riippumattomia $S(a)$-jakautuneita satunnaismuuttujia, niin onko olemassa luku b, ja mikä se silloin on, siten, että $X + Y + Z = bV$, missä V on $S(a)$-jakautunut?

4. (5p) Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} n\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\mathbf{1}_{\{X>n\}}\right) = 0.$$

5. (4p) Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{P}\{X = 1\} = p$ ja $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$ missä $0 < p < 1$. Olkoon $Y = \min\{ n \geq 1 : X_n = 1, X_{n+1} = 0 \}$. Määritä $\mathbb{P}\{Y = n\}$, kun $n = 1, 2, \ldots$ ja satunnaismuttujan Y karakteristinen funktio.

TURN OVER!

TKK, Department of Mathematics and Systems Analysis Gripenberg
Mat-1.3601 Johdatus stokastiikkaan
First midterm exam 7.3.2009

Write your name, student number, and other information on every paper!
A calculator is allowed in this exam!

1. (6p) A test has been developed to diagnose a certain disease, but this test does not always give a correct answer so that if a person has the disease the test gives a result indicating the disease with probability 0.6 and if the person does not have the disease, then the test gives a result indicating the disease with probability 0.02. In addition, it is estimated that 1.5 % of the population has the disease. What is the probability that a certain person has the disease if the test gives a result indicating that this is the case?

2. (5p) Let $\mathcal{F} = \{ A \subset \mathbb{R} : A = \cup_{j \in J}[j, j+1), J \subset Z \}$ (where $\mathbb{Z}$ is the set of integers). Show that $\mathcal{F}$ is a σ-algebra of $\mathbb{R}$. What kind of functions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are random variables, i.e., measurable with respect to the σ-algebra $\mathcal{F}$?

3. (4p) A random variable X is said to follow the $S(a)$-distribution if the characteristic function of X is $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|^a}$ (where we assume that $0 < a \leq 2$). If X, Y, and Z are independent $S(a)$-distributed random variables, is there a number b, and in that case what is it, so that $X+Y+Z = bV$,where V is $S(a)$-distributed?

4. (5p) Let X be a real valued random variable. Show that

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\mathbf{1}_{\{X>n\}}\right) = 0.$$

5. (4p) Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent random variables such that $\mathbb{P}\{X = 1\} = p$ and $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$ where $0 < p < 1$. Let $Y = \min\{ n \geq 1 : X_n = 1, X_{n+1} = 0 \}$. Determine $\mathbb{P}\{Y = n\}$, when $n = 1, 2, \ldots$ and the characteristic function of the random variable Y.

KÄÄNNÄ!